



université de bretagne
occidentale



THÈSE / UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE

sous le sceau de l'Université européenne de Bretagne

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE

*Mention : Sciences et Technologies de l'Information et de la
Communication (STIC)*

Spécialité : Optique appliquée et Lasers

École Doctorale SICMA 0373

présentée par

Deka MOUSSA DJAMA

Préparée au Laboratoire Lab-STICC,
UMR CNRS 6285

École Nationale d'Ingénieurs de Brest (ENIB)

Contributions à une modélisation tout-analytique de réseaux holographiques uni et bi-dimensionnels passifs et actifs

Thèse soutenue le 16 décembre 2013

devant le jury composé de :

Taha BENYATTOU

Directeur de recherches au CNRS
Institut des Nanotechnologies de Lyon-INSA / Rapporteur

Frédéric ZOLLA

Professeur des Universités
Institut Fresnel-Marseille / Rapporteur

Isabelle ZAQUINE

Professeur des Universités
Télécom ParisTech / Examinatrice

Florian BENTIVEGNA

Maître de Conférences à l' ENIB à Brest / Directeur de thèse

Yann BOUCHER

Maître de Conférences à l' ENIB à Brest / Encadrant

REMERCIEMENTS

Je remercie Isabelle ZAQUINE de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse, ainsi que Frédéric ZOLLA et Taha BENYATTOU pour avoir accepté la tâche de rapporteurs. Leurs lectures attentives et leurs questions ont permis de clarifier des points essentiels de ce travail de thèse et de rectifier des erreurs dans le manuscrit. Je suis profondément reconnaissante de leur aide.

De même, je suis profondément reconnaissante envers mon directeur de thèse Florian BENTIVEGNA et mon co-encadrant Yann BOUCHER de m'avoir accompagnée et soutenue durant ces 4 années de thèse. Je les remercie pour leur aide et ce qu'ils m'ont appris, que ce soit pour les méthodes de la recherche scientifique et celles de la pédagogie, ainsi que pour leurs conseils en termes de discipline de travail.

Je remercie aussi les ex-doctorants et thésards des laboratoires RESO et Lab-STICC de l'ENIB (Ecole Nationale d'ingénieurs de Brest), que j'ai eu la chance de côtoyer pendant ces quatre années, notamment Frédéric, Steven, Tammam, Hamid, Hadil, et Mayssa, pour leur amitié et nos échanges fructueux. Un merci particulier à Frédéric, qui m'a aidée à répondre à beaucoup de mes questions pédagogiques, scientifiques, et administratives. Un merci particulier également à Mayssa et Laura, pour leur aide à la bonne organisation de mon pot de soutenance. Je remercie aussi Alexandra LAGROST et Kamal NASREDDINE pour leur sympathie et les réponses qu'ils ont apportées à toutes mes questions.

D'autre part, je remercie également le Professeur Tigran GALSTIAN, responsable de l'équipe de recherche « *Matériaux photoniques* » du laboratoire COPL (Centre Optique Photonique et Laser) de l'Université Laval à Québec (Canada), pour son accueil et sa bienveillance envers moi, lors de mon séjour dans son laboratoire, ainsi que les membres de son équipe.

Je suis reconnaissante au Conseil Régional pour le financement de ma thèse, ainsi qu'à l'AUF (Agence Universitaire de la Francophonie) pour l'aide financière apportée à ma mobilité au Québec.

Enfin, je remercie chaleureusement tous ceux qui m'ont soutenue par leurs encouragements durant mon travail de thèse, à savoir mes parents, mes frères et sœurs, mes cousines et cousins.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	1
CHAPITRE I : LES RESEAUX HOLOGRAPHIQUES	7
I. Introduction	9
II. Généralités sur les réseaux holographiques	9
II.1 Principes de l'enregistrement holographique	9
II.2 Les réseaux de diffraction épais	11
II.2.1 Réseau épais de diffraction en transmission	12
II.2.2 Réseau épais de diffraction en réflexion distribuée	15
III. Technique expérimentale de photo-inscription de réseaux holographiques dans des polymères	17
III.1 Préparation d'une cellule de monomères	17
III.1.1 Composition de la solution de monomères	17
III.1.2 Préparation de la cellule avant polymérisation	19
III.2 Photoinscription d'un réseau holographique	20
III.2.1 Dispositif expérimental	20
III.2.2 Répartition des dopants dans le polymère	21
IV. Conclusion	22
CHAPITRE II : MODELISATION D'UN HOLOGRAMME UNIDIMENSIONNEL PASSIF	23
I. Introduction	25
II. Principes de calcul fondamentaux	26
II.1 Équation de propagation	26
II.1.1 Équations de Maxwell	26
II.1.2 Équations de propagation en polarisations TE et TM	27
II.1.3 Forme des solutions de l'équation de propagation	28
II.2 Hypothèses et formalismes de calcul	28
II.2.1 Théorie des ondes planes couplées	28
II.2.2 Approximation des enveloppes lentement variables	29
II.2.3 Hypothèse du réseau épais	29
II.2.4 Approche perturbative	29
II.2.5 Formalisme matriciel	29
III. Étude tout-analytique de l'hologramme 1D	31
III.1 Opérateur d'évolution et paramètres couploniques	35
III.1.1 Cas de la polarisation incidente TE	35
III.1.2 Cas de la polarisation incidente TM	39
III.2 Matrice de transfert de l'hologramme 1D	45
IV. Coefficients de répartition et réponses de l'H1D	51
IV.1 Matrices d'interface	51
IV.1.1 Forme générique des matrices d'interface	51
IV.1.2 Forme générique des coefficients de Fresnel	53
IV.1.3 Forme réduite des éléments de matrices d'interface	58
IV.1.4 Cas des ondes « R » réfractée et réfléchie	58
IV.1.5 Cas des ondes « S » diffractée et rétrodiffractée	60

IV.2	Coefficients de répartition de l'H1D	62
IV.3	Réponses optiques de la structure	63
IV.3.1	Réponses spectrales	66
IV.3.2	Réponses angulaires	67
IV.3.3	Réponses en fonction des paramètres structurels	68
A	Désaccord de phase co-directionnel normalisé	68
B	Coefficient de couplage co-directionnel normalisé	69
C	Épaisseur de l'hologramme 1D	71
D	Période spatiale de l'hologramme 1D	72
E	Partie imaginaire de la permittivité moyenne du milieu	72
F	Partie réelle de la modulation de la permittivité	74
G	Partie imaginaire de la modulation de la permittivité	75
H	Déphasage entre modulations réelle et imaginaire	75
V.	Conclusions : vers l'hologramme 2D	76
CHAPITRE III : MODELISATION D'UN HOLOGRAMME BIDIMENSIONNEL PASSIF		79
I.	Introduction	81
II.	Étude tout-analytique de l'hologramme 2D	83
II.1	Opérateur d'évolution et paramètres couploniques	84
II.1.1	Cas de la polarisation incidente TE	84
II.1.2	Cas de la polarisation incidente TM	89
II.2	Matrice de transfert de l'hologramme 2D	93
II.2.1	Renormalisation de l'opérateur d'évolution	94
II.2.2	Passage en base G/U	96
II.2.3	Détermination des modes propres dans la base G/U	98
II.2.4	Matrice de transfert dans la base G/U	100
II.2.5	Matrice de transfert dans la base (A', B', C', D')	102
II.2.6	Matrice de transfert dans la base (A, B, C, D)	103
II.2.7	Matrice de transfert dans la base (R^+, R^-, S^+, S^-)	104
II.2.8	Matrice de transfert pour les champs physiques	104
III.	Coefficients de répartition et réponses de l'H2D	105
III.1	Coefficients de répartition de l'H2D	105
III.2	Réponses optiques de la structure	106
III.2.1	Réponses spectrales	107
III.2.2	Réponses angulaires	109
III.2.3	Réponses en fonction des paramètres couploniques	111
A	Désaccord de phase co-directionnel normalisé	111
B	Désaccord de phase contra-directionnel normalisé	112
C	Coefficient de couplage co-directionnel normalisé	114
D	Coefficient de couplage contra-directionnel normalisé	115
III.2.4	Réponses en fonction des paramètres structurels	116
A	Épaisseur de l'hologramme 2D	116
B	Période spatiale du réseau en transmission	118
C	Période spatiale du réseau en réflexion distribuée	119

III.3	Cas où les deux conditions de bragg coïncident	120
III.3.1	Influence du coefficient de couplage co-directionnel normalisé sur la réflexion	121
III.3.2	Influence du coefficient de couplage contra-directionnel normalisé sur le coefficient de diffraction	124
IV.	Conclusions et perspectives : vers l'H2D actif	126
CHAPITRE IV : VERS UNE EXTENSION A UN HOLOGRAMME 2D ACTIF		129
I.	Introduction	131
II.	Étude tout-analytique de l'H2D actif	131
II.1	Géométrie	131
II.1.1	Contributions aux ondes émergentes	133
II.1.2	Relations entre les vecteurs d'onde en présence	135
II.1.3	Calcul des coefficients de Fresnel	139
II.2	Matrice de transfert étendue de l'H2D actif	141
II.3	Calcul des intensités sortantes de l'H2D actif	145
II.3.1	Pour une direction d'émission unique	145
II.3.2	Pour deux directions d'émission complémentaires	146
III.	Principes de généralisation et perspectives	147
CONCLUSION		149
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES		155
TABLE DES FIGURES		161

INTRODUCTION

Dans le contexte du traitement optique de l'information, les composants diffractifs, actifs comme passifs, sont très présents. Les lasers à rétroaction distribuée (ou DFB, pour *Distributed FeedBack*) constituent par exemple des sources de lumière spectralement sélectives bien adaptées à ce domaine d'application. Dans le cadre du développement et de l'optimisation de lasers à rétroaction distribuée, des problématiques importantes sont la diminution des coûts de fabrication et la simplicité de fabrication. Récemment, une solution attractive à ces problématiques a été proposée : fabriquer des structures diffractives actives en inscrivant par technique holographique un réseau (ou plusieurs réseaux croisés) de diffraction dans le volume d'une matrice de polymère dans laquelle des centres actifs (par exemple des points quantiques, des ions erbium, etc.) sont dispersés [Hsiao 05] [Massenot 06].

C'est autour de l'étude de ce type de dispositifs qu'une collaboration a vu le jour en 2008 entre une équipe de deux enseignants-chercheurs du laboratoire RESO (Recherche en Électronique, Signal, Optoélectronique et Télécommunications) de l'École Nationale d'Ingénieurs de Brest et le laboratoire « *Matériaux Photoniques* » dirigé par le Pr. Tigran GALSTIAN au COPL (Centre d'Optique, Photonique et Laser) de l'université Laval à Québec (Canada). C'est sous la direction scientifique conjointe de ces deux chercheurs, Florian BENTIVEGNA (Maître de Conférences, membre depuis 2012 de l'équipe « Matériaux Fonctionnels » du pôle « *Micro-Ondes, Optoélectronique et Matériaux* » du laboratoire Lab-STICC, UMR CNRS 6285) et Yann BOUCHER (Maître de Conférences, membre depuis 2010 du groupe « *Lasers & Télécoms* » du Laboratoire FOTON, UMR CNRS 6082), que ce travail de thèse a été effectué.

Le travail présenté dans ce manuscrit porte sur la modélisation tout-analytique, dans le cadre des formalismes des ondes couplées et des matrices de transfert, d'une structure diffractive — un réseau holographique épais — dont la permittivité diélectrique est modulée sinusoïdalement dans deux directions orthogonales, et qui peut être rendue active par inclusion de sources quasi-punctuelles. Cette structure peut être vue comme la superposition d'un réseau de diffraction en transmission (dans le régime de Bragg, où un seul ordre de diffraction est considéré) et d'un réseau en réflexion distribuée, ou miroir de Bragg (ou encore DBR, pour *Distributed Bragg Reflector*). De ce fait, elle présente une forte sélectivité tant angulaire que spectrale, et constitue par ailleurs une cavité résonnante.

Ce type de structures photoniques a récemment fait l'objet d'un intérêt prononcé (voir par exemple [Massenot 06], [He 09]). Si toutefois l'approche usuelle fait appel, pour la description du réseau de diffraction en transmission, au formalisme des ondes couplées [Kogelnik 69], elle traite en revanche le DBR comme un empilement multicouche périodique dans le cadre du formalisme des matrices de transfert [Yariv 84]. Par le biais d'une approche perturbative de la modulation de permittivité du réseau, nous montrons qu'il est possible, sans faire appel à un découpage de la structure en sous-éléments, de déterminer d'un seul trait ses modes propres de propagation, sa matrice de transfert et les paramètres de répartition énergétiques qui en découlent, que la structure soit uni-dimensionnelle ou bi-dimensionnelle, y compris en présence de termes-sources.

Pour chacun des états fondamentaux de polarisation TE (transverse électrique) et TM (transverse magnétique), nous ramenons l'étude de la réponse de la structure à la détermination d'un jeu de quelques paramètres normalisés, dits « couploniques » [Boucher 06b] [Boucher 07], dont les valeurs dépendent des caractéristiques constitutives (les amplitudes de modulation bidimensionnelle complexe de la permittivité diélectrique) du dispositif et des conditions expérimentales (fréquence de l'onde incidente ou émise par une source interne d'émission spontanée, angles d'incidence ou d'émission). Formellement, le problème se ramène à chaque fois à un couplage à quatre ondes. Dans le cas d'un hologramme incluant une source ponctuelle, nous montrons comment son émission spontanée se projette dans les modes propres de propagation de la structure passive [Kastler 62], au moyen du formalisme des matrices de transfert étendues, particulièrement adapté au cas des structures actives [Weber 91], [Boucher 06a].

Le travail décrit dans ce manuscrit s'articule en quatre chapitres.

Le premier chapitre présente des généralités sur les réseaux holographiques épais, et décrit les caractéristiques de réseaux en transmission et de réseaux en réflexion distribuée (DBR), dans lesquels deux ondes interagissent, en termes de paramètres adimensionnels simples qui gouvernent entièrement l'efficacité de diffraction (pour un réseau en transmission) ou la réflectivité (pour un DBR) de ces structures. Ces paramètres normalisés sont interprétés comme des coefficients de couplage entre ondes co- ou contra-directionnelles, suivant le cas, et des coefficients de désaccord vis-à-vis de conditions d'accord de phase (dites conditions de Bragg) entre les ondes et la périodicité du réseau. Enfin, nous présentons dans ce chapitre une technique simple de fabrication de réseaux photo-inscrits dans des matrices de polymères, avec ou sans dopage par des points quantiques, avec laquelle je me suis familiarisée lors d'un séjour de quelques mois dans le laboratoire du Pr. Tigran GALSTIAN au COPL de l'université Laval à Québec.

Le second chapitre est consacré à l'étude tout-analytique, approfondie d'un hologramme unidimensionnel (ou hologramme 1D, ou encore H1D) *passif*, qui n'est autre qu'un réseau épais de diffraction en transmission placé dans une cavité Fabry-Pérot. Nous commençons par définir les hypothèses sur lesquels s'appuient tous nos calculs (approche perturbative, approximation des enveloppes lentement variables, hypothèse du réseau épais), et les formalismes qu'ils empruntent (théorie des ondes couplées, formalisme de matrice de transfert). Pour une onde dite « de référence », polarisée dans l'état TE ou TM, incidente sur l'hologramme 1D, nous déterminons un opérateur d'évolution des quatre ondes qui se propagent alors dans l'hologramme, et introduisons naturellement les paramètres couploniques qui le gouvernent. La diagonalisation de cet opérateur mène aux modes propres de propagation dans l'H1D, et à la matrice de transfert (4×4) de cette structure, dont on peut alors déduire l'expression des coefficients de répartition énergétique (facteurs de transmission, diffraction, réflexion et rétrodiffraction). Dans la dernière partie de ce chapitre, nous illustrons ces calculs en présentant la dépendance spectrale et angulaire de ces coefficients énergétiques vis-à-vis des divers paramètres structurels de l'H1D.

Le troisième chapitre généralise l'étude précédente, et montre qu'une approche tout-analytique qui s'appuie sur les mêmes hypothèses et formalismes que ceux mis en œuvre pour l'étude de l'H1D

permet de modéliser la réponse d'un réseau holographique bidimensionnel (ou hologramme 2D, ou encore H2D), ici encore *passif*, qui n'est autre que la superposition croisée d'un réseau en transmission et d'un réseau en réflexion distribuée. Comme au chapitre précédent, la détermination de l'opérateur d'évolution met en lumière les paramètres couploniques qui régissent l'H2D, et la diagonalisation de cet opérateur mène aux modes propres de cette structure, à sa matrice de transfert (4×4) et à quatre coefficients de répartition énergétique. À nouveau, nous concluons le chapitre par une illustration de nos calculs, en discutant la dépendance spectrale et angulaire de ces coefficients énergétiques vis-à-vis des divers paramètres structuraux de la structure photonique.

Le quatrième et dernier chapitre présente les principes d'une extension de l'approche antérieure au cas d'un H2D *actif*, dans lequel une source ponctuelle d'émission spontanée, isotrope et monochromatique, est placée. Nous montrons qu'une description tout-analytique de la structure reste possible, *via* l'introduction de matrices de transfert étendues (5×5) incluant la contribution de la source. Nous montrons que l'émission de la source intracavité se projette sur les modes propres de l'H2D *passif* étudié au chapitre précédent, qui joue donc le rôle de filtre spectral et angulaire de cette émission. Nous déterminons également les expressions analytiques de la dépendance angulaire des intensités émises à travers les facettes qui délimitent l'H2D. Nous concluons le chapitre en exposant les principes d'une généralisation de cette modélisation à un ensemble de sources, localisées de manière discrète et périodique dans l'H2D ou encore réparties continûment, ainsi qu'à une émission spontanée à spectre large. Nous évoquons également les perspectives de ce travail en direction de la détermination des modes de résonance de l'H2D actif et de son étude en tant que cavité laser DFB.

CHAPITRE I

LES RESEAUX HOLOGRAPHIQUES

I. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous présentons brièvement quelques généralités sur les réseaux de diffraction épais obtenus par technique interférométrique, dite encore holographique. Après quelques rappels sur la notion d'hologramme, nous nous intéressons aux propriétés générales des réseaux épais holographiques, qu'il s'agisse de réseaux en transmission ou de réseaux en réflexion distribuée [Kogelnik 69] [Moharam 81] [Gaylord 85] [Mallick 90] [Boucher 00].

En particulier, nous introduisons, à travers ces deux types de réseaux, les paramètres physiques qui gouvernent leur réponse — paramètres que nous verrons tout naturellement apparaître dans le cours de ce travail — et qui traduisent les interactions entre les ondes en présence et entre ces ondes et le réseau périodique lui-même. Ces paramètres, rendus adimensionnels quand on les normalise par la longueur L d'interaction entre les ondes, sont :

- deux paramètres réduits, χL (une constante de couplage co-directionnel entre les ondes) et ΔL (un désaccord de phase des ondes vis-à-vis de la période du réseau) qui gouvernent l'efficacité de diffraction des réseaux en transmission, dans lesquels on a affaire à un couplage entre ondes co-directionnelles ;
- également deux paramètres réduits, κL (une constante de couplage contra-directionnel entre les ondes) et δL (un désaccord de phase des ondes vis-à-vis de la période du réseau) qui gouvernent la réflectivité des réseaux en réflexion, dans lesquels on a affaire à un couplage entre ondes contra-directionnelles.

Enfin, nous décrivons une technique expérimentale d'obtention de réseaux holographiques par photo-inscription dans des matrices de polymère photosensibles.

II. GÉNÉRALITÉS SUR LES RÉSEAUX HOLOGRAPHIQUES

II.1. PRINCIPES DE L'ENREGISTREMENT HOLOGRAPHIQUE

Le mot « holographie », dérivé du grec *holos* (« en entier ») et *graphein* (« écrire »), désigne un type d'enregistrement d'une onde électromagnétique qui préserve l'information complète transportée par cette onde, son amplitude comme sa phase. Lorsqu'il s'agit d'enregistrer une image, l'onde diffractée par un objet est mélangée, dans un matériau photosensible, avec l'onde initiale servant à éclairer l'objet. La figure d'interférences enregistrée par le matériau conserve alors l'information de phase en provenance de l'objet, ce qui permet la restitution de cet objet dans toutes ses dimensions spatiales lors d'une phase de lecture [Françon 69] [Hariharan 02]. Afin de réaliser l'enregistrement puis la restitution d'une image holographique, on a besoin d'une source de lumière cohérente.

La figure I.1a illustre schématiquement la méthode d'enregistrement holographique. Deux faisceaux optiques cohérents interfèrent sur un support d'enregistrement (un milieu photosensible) : l'un, appelé « *onde de référence* » de champ complexe \vec{E}_1 , est envoyé directement

sur le matériau photosensible ; l'autre, qualifié d'« onde objet » de champ complexe \vec{E}_2 , provient de la diffraction d'une fraction de l'onde de référence par l'objet dont on enregistre l'image.

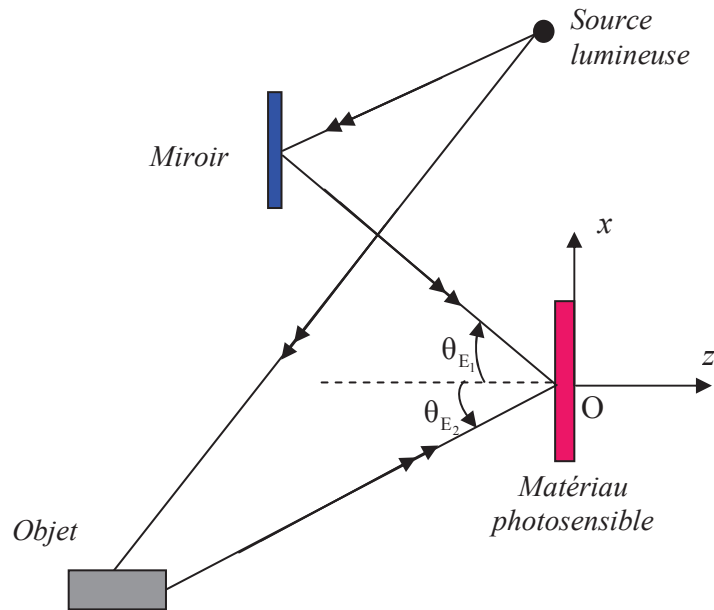


Fig. I.1a : Schéma de principe de l'enregistrement d'un hologramme.

L'intensité lumineuse résultant de cette superposition est alors de la forme :

$$I \propto |\vec{E}_1 + \vec{E}_2|^2 = |\vec{E}_1|^2 + |\vec{E}_2|^2 + \vec{E}_1^* \cdot \vec{E}_2 + \vec{E}_2^* \cdot \vec{E}_1, \quad (\text{I.1})$$

où les termes croisés du développement contiennent l'information de phase en provenance de l'objet, ce qui permet une restitution complète de l'objet tridimensionnel lors de la lecture de l'hologramme, en l'éclairant sous le même angle d'incidence que l'onde de référence initial (Fig. I.1b).

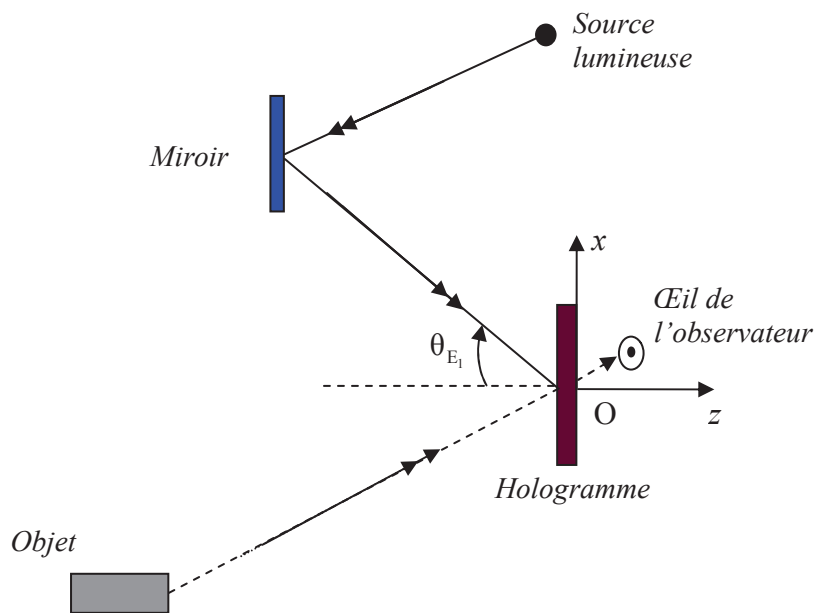


Fig. I.1b : Schéma de principe de la lecture d'un hologramme.

L'enregistrement d'un réseau périodique suit la même logique que celui d'une image holographique, mais il s'agit ici de transformer l'information de phase en une variation spatiale de la permittivité diélectrique (ou de l'indice de réfraction) du support d'enregistrement. En illuminant par deux faisceaux croisés ce milieu photosensible, on y crée une modulation spatiale périodique d'intensité qui dépend de l'écart angulaire entre les deux faisceaux et de leur déphasage relatif. Dans le cas d'un milieu photopolymérisable, la modulation d'intensité a pour conséquence un degré de polymérisation spatialement distribué, qui se traduit par une modulation spatiale d'indice de réfraction, avec :

$$n(\vec{r}) = n_0 + \Delta n(\vec{r}), \quad (\text{I.2})$$

où n_0 et $\Delta n(\vec{r})$ représentent respectivement l'indice de réfraction supposé homogène du milieu avant photo-inscription et la modulation spatiale photo-inscrite de cet indice qui s'y superpose. On obtient donc un réseau de diffraction photo-inscrit dans le volume du milieu photosensible.

Si l'on note $\Delta\varphi = \Delta\varphi(\vec{r})$ le déphasage relatif entre les deux ondes qui interfèrent dans le milieu holographique, l'équation (I.1) se ramène à :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi), \quad (\text{I.3})$$

où I_1 et I_2 sont les intensités respectives des deux ondes, ce qui peut classiquement être reformulé selon :

$$I = I_0 [1 + m \cos(\Delta\varphi)], \quad (\text{I.4})$$

où l'on introduit l'intensité totale moyenne $I_0 = I_1 + I_2$ et le *facteur de modulation* m défini par :

$$m = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}. \quad (\text{I.5})$$

En supposant, en première approximation, que la modulation de l'indice de réfraction dans le matériau photosensible est proportionnelle à celle de l'intensité totale, on trouve alors que Δn dans le matériau photosensible prend la forme :

$$\Delta n = n_0 [1 + m \cos(\Delta\varphi)]. \quad (\text{I.6})$$

II.2. LES RESEAUX DE DIFFRACTION EPAIS

La photoinscription de réseaux holographiques a fait l'objet de nombreux travaux, tant théoriques qu'applicatifs (voir par exemple [Menez 01] [Loukina 03a] [Loukina 04] [Massenot 04] [He 05] [He 06], [Massenot 06] [Moreau 06] [He 08a] [He 08b] [He 09] [Barichard 11]).

De tels réseaux peuvent ainsi, de manière non exhaustive, être photoinscrits dans une fibre optique en vue d'obtenir une forte sélectivité spectrale ([Meltz 89] [Hill 97] [Giles 97] [Kashyap 99] [Bitauld 05] [Lagrost 10]), pour la fabrication de lasers à fibre optique, le stockage de

l'information (DVD holographiques), ou encore la réalisation de lasers à rétroaction distribuée (ou lasers DFB, pour *Distributed Feed-Back*) [Weber 91] [Hsiao 05].

Lorsque la permittivité diélectrique du milieu holographique est modulée selon une direction parallèle à sa face d'entrée (et perpendiculaire à la direction générale de propagation des ondes), on obtient un réseau de diffraction épais en transmission. En revanche, lorsque cette permittivité est modulée selon une direction perpendiculaire à la face d'entrée du milieu (et parallèle à la direction de propagation), on obtient dans ce cas un réseau épais en réflexion distribuée.

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de décrire brièvement les réponses caractéristiques de chacun de ces deux types de réseaux épais.

II.2.1. RÉSEAU ÉPAIS DE DIFFRACTION EN TRANSMISSION

La figure I.2 présente schématiquement un réseau épais de diffraction en transmission. Une onde incidente pénètre dans le milieu d'indice de réfraction modulé et donne naissance, dans le milieu émergent, à une onde réfractée (ou transmise) et à une onde diffractée. Cette dernière se construit graduellement dans l'épaisseur du réseau. Dans le régime de diffraction de Bragg (réseaux épais), on ne considère que le premier ordre de diffraction en négligeant les ordres supérieurs.

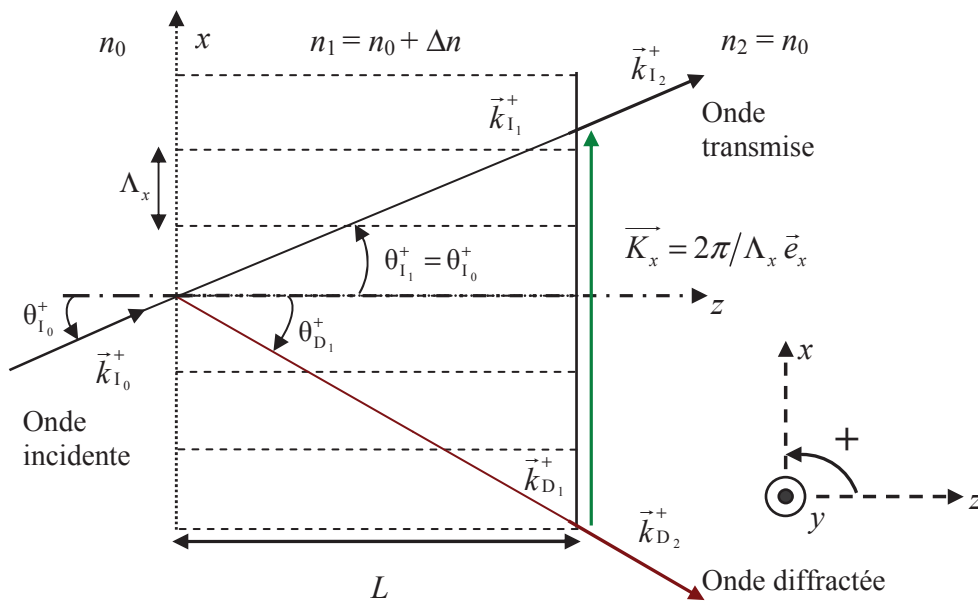


Fig. I.2 : Schéma de la diffraction par un réseau épais de diffraction en transmission.

L'axe (Oz) est choisi perpendiculairement à la face d'entrée du réseau, et la modulation spatiale de permittivité diélectrique est orientée selon l'axe (Ox), et est de période Λ_x . Nous prenons ici l'indice de réfraction des milieux extérieurs au réseau identiques à l'indice moyen du réseau — autrement dit, nous faisons abstraction des effets d'interfaces — et les vecteurs d'ondes $\vec{k}_{I_0}^+$, $\vec{k}_{I_1}^+$ et $\vec{k}_{I_2}^+$ des ondes respectivement incidente, réfractée dans le réseau et réfractée (émergente)

en sortie de réseau sont colinéaires, de même que sont colinéaires les vecteurs d'ondes $\vec{k}_{D_1}^+$ et $\vec{k}_{D_2}^+$ de l'onde diffractée lors de la traversée du réseau et sa réfraction en sortie de réseau.

On peut montrer [Boucher 00], comme nous le ferons de manière détaillée dans le chapitre II, que la réponse de la structure est essentiellement gouvernée par un jeu de paramètres normalisés, au nombre de 2 dans ce cas simple : un coefficient de couplage co-directionnel normalisé χL , et un désaccord de phase normalisé ΔL , où L représente l'épaisseur du réseau de diffraction dans le sens de propagation, donc selon (Oz). Nous définirons explicitement, au chapitre suivant, les expressions analytiques de ces paramètres. Notons toutefois que le premier est proportionnel à l'amplitude de modulation de la permittivité diélectrique, et rend compte de l'échange d'énergie entre les ondes réfractée et diffractée au cours de leur propagation co-directionnelle dans l'épaisseur du réseau. Le second, lui, traduit le plus ou moins grand accord entre la fréquence spatiale $K_x = 2\pi / \Lambda_x$ caractéristique du réseau et les vecteurs d'onde des ondes qui s'y propagent.

À eux deux, ces paramètres permettent de déterminer l'efficacité de diffraction du réseau, définie comme le rapport de l'intensité de l'onde diffractée sur celle de l'onde incidente, et qui s'écrit, en l'absence de pertes ou de gain [Mallick 90] [Boucher 00] :

$$\eta = \frac{(\chi L)^2 \sin^2(\Gamma L)}{(\Gamma L)^2}, \quad (\text{I.7})$$

où l'on introduit, pour alléger l'écriture, le paramètre additionnel $\Gamma = \sqrt{\Delta^2 + \chi^2}$.

La figure I.3 montre les variations de l'efficacité de diffraction η du réseau en fonction des paramètres normalisés χL et ΔL .

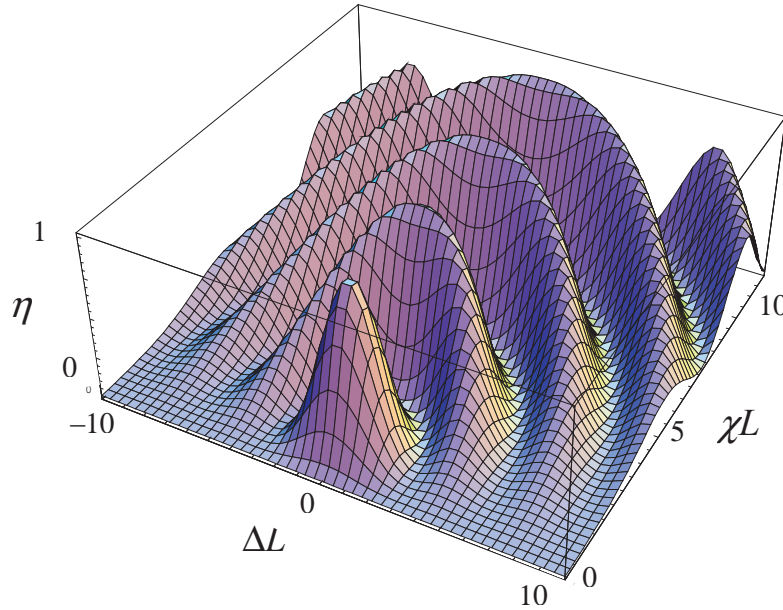


Fig. I.3 : Efficacité de diffraction η d'un réseau épais en transmission en fonction des paramètres réduits χL et ΔL .

Le paramètre Δ peut être interprété comme un écart à la condition de Bragg, qui est la condition pour laquelle la diffraction est favorisée. Plus spécifiquement, la condition de Bragg est satisfaite pour $\Delta L = 0$. Pour une longueur d'onde incidente donnée, cela correspond à un angle d'inclinaison $\theta_{I_1}^+$ du vecteur $\vec{k}_{I_1}^+$ par rapport à l'axe (Oz) appelé *angle de Bragg* et défini par :

$$\theta_{\text{Bragg}} = \arcsin \left(\frac{\lambda}{2 n_1 \Lambda_x} \right). \quad (\text{I.8})$$

La vérification de la condition d'accord de phase de Bragg ($\Delta L = 0$) n'est cependant pas une condition suffisante à l'obtention d'une forte efficacité de diffraction, comme le montre la figure I.3. Il faut également que le coefficient de couplage, soit bien choisi. On vérifie en effet qu'à la condition de Bragg, on a $\Gamma L = |\chi L|$, et que l'efficacité de diffraction s'écrit alors :

$$\eta_{\text{Bragg}} = \sin^2(\chi L), \quad (\text{I.9})$$

et cette efficacité de diffraction peut atteindre sa valeur théorique maximale $\eta_{\text{max}} = 1$ lorsque le coefficient de couplage normalisé χL prend les valeurs $\chi L = (2p+1)\frac{\pi}{2}$, où p est un entier positif.

Lorsque ces deux conditions sont vérifiées, la totalité de l'énergie incidente est transférée vers l'onde diffractée dans l'épaisseur du réseau.

Notons que, outre l'efficacité de diffraction, une autre caractéristique importante d'un tel réseau est sa sélectivité angulaire et spectrale [Kogelnik 69] [Mallick 90] [Massenot 06] [He 08b]. La sélectivité angulaire est décrite par la largeur angulaire (typiquement, à mi-hauteur) du pic de diffraction à longueur d'onde donnée, et la sélectivité spectrale est donnée par la largeur spectrale de ce pic à angle d'incidence donné.

On peut également remarquer que ce type de comportement est analogue à celui d'un coupleur co-directionnel tel qu'employé en Optique intégrée [Tamir 90], [Boudrioua 06]. Le coupleur co-directionnel (Fig. I.4) est un composant photonique qui sert à permettre l'échange de signal lumineux entre deux guides voisins. Il peut par exemple être réalisé par une fusion contrôlée de deux fibres optique en rapprochant les deux coeurs de quelques microns seulement.

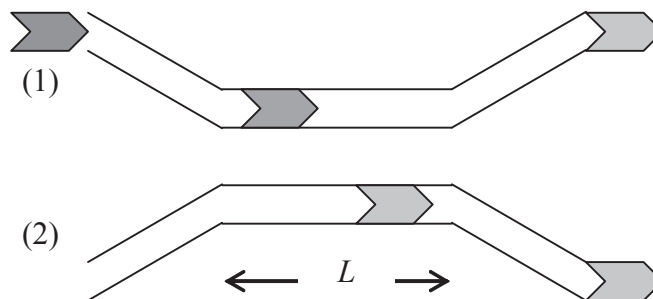


Fig. I.4 : Coupleur directionnel à deux guides. On note L la longueur d'interaction entre les guides (d'après [Boucher 00]).

On montre [Boucher 00] que pour un transfert total d'énergie du guide (1) vers un guide (2) identique, il faut (et il suffit) que la longueur L de l'interaction vérifie $\chi L \equiv \pi/2$ [π], où χ désigne là-aussi un coefficient de couplage entre guides qui dépend de leur géométrie, de leurs propriétés diélectriques, de leur distance respective et de la fréquence des ondes qui s'y propagent.

II.2.2. RÉSEAU ÉPAIS DE DIFFRACTION EN RÉFLEXION DISTRIBUÉE

La figure I.5 présente schématiquement un réseau épais de diffraction en réflexion distribuée, encore appelé miroir de Bragg, ou DBR (pour *Distributed Bragg Reflector*). Comme pour le réseau en transmission, nous nous limitons ici à un réseau sans gain ni pertes. Sa permittivité diélectrique est modulée selon l'axe (Oz).

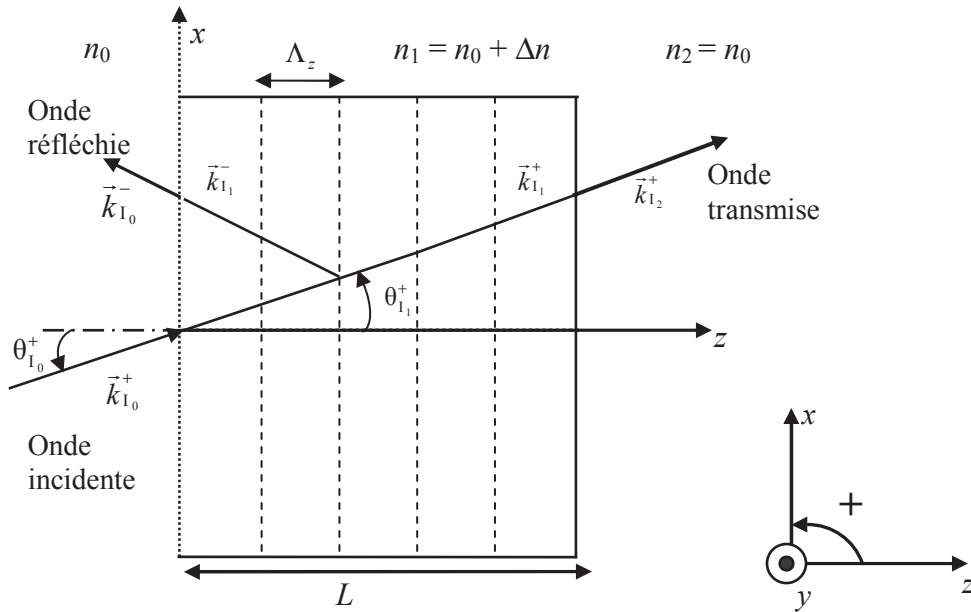


Fig. I.5 : Schéma de la diffraction par un réseau épais de diffraction en réflexion.

L'axe (Oz) est choisi perpendiculairement à la face d'entrée du réseau, et la modulation spatiale de permittivité diélectrique est orientée selon ce même axe (Oz), et est de période Λ_z . Comme précédemment, nous prenons pour simplifier l'indice de réfraction des milieux extérieurs identiques à l'indice moyen du réseau, et les vecteurs d'ondes $\vec{k}_{1_0}^+$, $\vec{k}_{1_1}^+$ et $\vec{k}_{1_2}^+$ des ondes respectivement incidente, réfractée dans le réseau et réfractée (émergente) en sortie de réseau sont colinéaires, de même que sont colinéaires les vecteurs d'ondes $\vec{k}_{1_1}^-$ et $\vec{k}_{1_0}^-$ de l'onde rétrodiffractée lors de la traversée du réseau et sa réfraction en sortie de réseau.

Une onde incidente pénètre dans le milieu d'indice de réfraction modulé et donne naissance, dans le milieu émergent, à une onde réfractée (ou transmise), et, dans le sens de propagation inverse, à une onde rétrodiffractée (ou réfléchie) vers le milieu incident. Cette onde rétrodiffractée se construit au fur et à mesure de la traversée du réseau. Il s'agit d'une *réflexion distribuée* tout au long de la propagation de l'onde dans ce réseau, contrairement à une réflexion localisée dans le cas d'un miroir usuel.

Comme pour le réseau en transmission, on montre [Boucher 00], et nous le ferons de manière détaillée dans le chapitre II, que la réponse de la structure est essentiellement gouvernée par un jeu de paramètres normalisés, à nouveau au nombre de 2 dans ce cas simple : un coefficient de couplage contra-directionnel normalisé κL , et un désaccord de phase normalisé δL , où L est l'épaisseur du réseau de diffraction dans le sens de propagation, selon (Oz).

Les expressions analytiques explicites de ces paramètres seront établies au chapitre suivant. Le premier est notamment proportionnel à l'amplitude de modulation de la permittivité diélectrique, et rend compte de l'échange d'énergie entre les ondes réfractée et rétrodiffraquée au cours de leur propagation contra-directionnelle dans toute l'épaisseur du réseau. Le second traduit à nouveau le plus ou moins grand accord entre la fréquence spatiale $K_z = 2\pi / \Lambda_z$ caractéristique du réseau et les vecteurs d'onde des ondes qui s'y propagent. Comme nous le verrons, il est d'usage, pour les DBR, de définir le désaccord de phase δ par :

$$\delta = \beta_1 - \beta_{\text{Bragg}}, \quad (\text{I.10})$$

où β_1 est la composante selon l'axe (Oz) du vecteur d'onde $\vec{k}_{1_1}^+$ et $\beta_{\text{Bragg}} = \pi / \Lambda_z = K_z / 2$.

Ces deux paramètres permettent de déterminer l'une des principales grandeurs caractéristiques d'un réseau en réflexion distribuée : sa réflectivité R . Cette dernière est définie par [Boucher 00] :

$$R = \frac{|\kappa L \operatorname{sh}(\gamma L)|^2}{|\gamma L \operatorname{ch}(\gamma L) + i \delta L \operatorname{sh}(\gamma L)|^2}, \quad (\text{I.11})$$

où l'on introduit le paramètre additionnel $\gamma = \sqrt{\kappa^2 - \delta^2}$.

La figure I.6 montre les variations de la réflectivité R du réseau en réflexion distribuée en fonction des paramètres normalisés κL et δL .

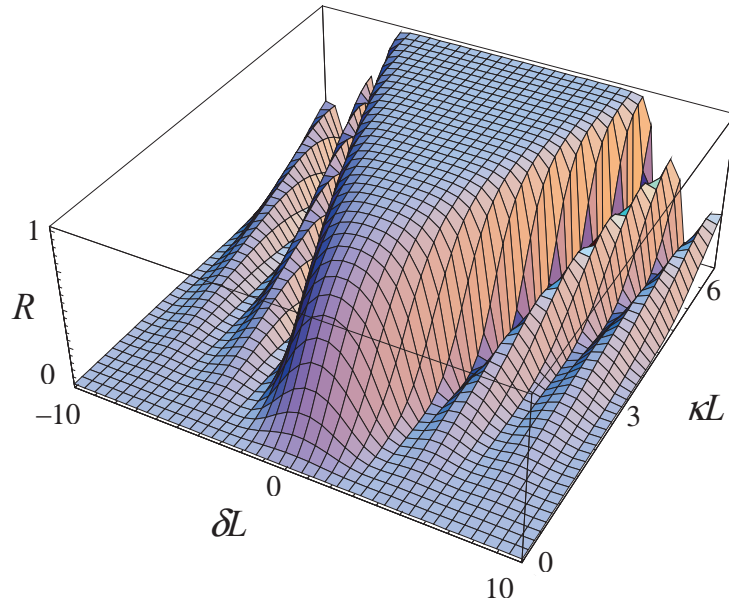


Fig. I.6 : *Réflectivité R d'un réseau épais en réflexion distribuée en fonction des paramètres réduits κL et δL .*

Le paramètre δ peut être interprété comme un écart à la condition de Bragg pour un DBR, qui est la condition pour laquelle la rétrodiffraction — et donc la réflectivité du DBR — est favorisée. Plus spécifiquement, la condition de Bragg est satisfaite pour $\delta L = 0$, ce qui correspond à une longueur d'onde de Bragg et un angle de Bragg interne au réseau liés par :

$$\lambda_{\text{Bragg}} = 2 n_1 \Lambda_z \cos(\theta_{\text{Bragg}}). \quad (\text{I.12})$$

Le profil de réflectivité représenté sur la figure I.6 montre que R passe par un maximum, à constante de couplage contra-directionnel donnée, lorsque la condition de Bragg $\delta L = 0$ est vérifiée. Dans ce cas, on a $\gamma L = |\kappa L|$, et la réflectivité vaut :

$$R_{\text{Bragg}} = |\text{th}(\kappa L)|^2, \quad (\text{I.13})$$

et cette réflectivité est d'autant plus élevée (et tend asymptotiquement vers sa valeur maximale théorique $R_{\text{max}} = 1$) que la constante normalisée κL de couplage contra-directionnel est elle-même élevée, ce qu'illustre clairement la figure.

À constante de couplage donnée, on constate par ailleurs que la réflectivité de la structure présente un plateau de valeurs proches de son maximum local (obtenu lorsque la condition de Bragg est satisfaite). Ce plateau de réflectivité — ou encore cette région de transmissivité $T = 1 - R$ (en l'absence de pertes ou de gain) minimale — est, dans le langage des cristaux photoniques, la *bande interdite* du réseau en réflexion distribuée. Cette bande interdite correspond à la condition mathématique suivante :

$$\gamma = \sqrt{\kappa^2 - \delta^2} \in \mathbb{R} \Rightarrow \delta L \in [-\kappa L, +\kappa L]. \quad (\text{I.14})$$

La valeur de la constante de couplage normalisée définit donc non seulement la réflectivité maximale du DBR, mais aussi la largeur de sa bande interdite.

III. TECHNIQUE EXPÉRIMENTALE DE PHOTO-INSCRIPTION DE RÉSEAUX HOLOGRAPHIQUES DANS DES POLYMÈRES

Dans cette partie, nous présentons succinctement une technique expérimentale de réalisation d'hologrammes épais photo-inscrits dans une matrice polymérique. Un court séjour au sein de l'équipe du Pr. Tigran GALSTIAN du laboratoire COPL (Centre d'Optique Photonique et Laser) de l'Université Laval (Québec, Canada), a permis l'apprentissage de la fabrication de matrices polymériques de bonne qualité optique, pures ou dopées par des sources émettrices, ainsi que de la photo-inscription de réseaux par technique interférentielle dans ces matrices.

III.1. PREPARATION D'UNE CELLULE DE MONOMERES

III.1.1. COMPOSITION DE LA SOLUTION DE MONOMÈRES

La solution de monomère photopolymérisable est composée, dans des proportions massiques respectives de 89,7 %, 10 %, et 0,3 % des trois constituants suivants :

- le monomère à proprement parler, du pentaérythritol triacrylate (ou PETA) de formule chimique $C_{14}H_{18}O_7$, fourni par la société Aldrich: il s'agit d'un monomère trifonctionnel qui se polymérise lorsqu'il est soumis à une exposition à un rayonnement de longueur d'onde comprise entre 400 à 700 nm — dans notre cas, il sera fait usage d'un laser à argon émettant à 514 nm ;
- le N-méthyle diéthanolamine (ou MDEA) de formule $CH_3N(C_2H_4OH)_2$, également fourni par Aldrich (pureté 99%) : c'est une amine tertiaire, une molécule donneuse d'électrons utilisée ici en tant que co-photoinitiateur ou co-amorceur de la réaction de polymérisation. Le MDEA génère dans le milieu des radicaux libres qui déclenchent la réaction [Barichard 11] ;
- l'éosine Y (appelée aussi tétrabromofluorescéine) de formule $C_{20}H_8Br_4O_5$, qui est un photosensibilisateur à la longueur d'onde du laser à argon, et facilite également la réaction de photopolymérisation.

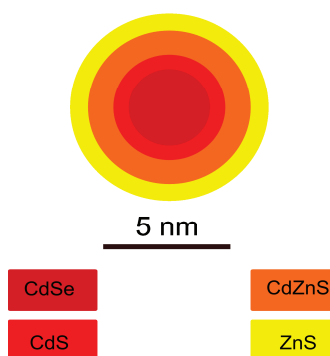


Fig. I.7 : Structure des points quantiques utilisés comme sources.

Si l'on veut obtenir un hologramme actif, on ajoute à la solution de monomère des points quantiques (*quantum dots*). Ceux utilisés (Fig. I.7), synthétisés par une équipe du COPL, ont un diamètre de quelque 5 nm, sont inertes du point de vue de la réaction de photopolymérisation et sont constitués de coquilles sphériques concentriques, de structure CdSe / CdS / $Cd_{0,5}Zn_{0,5}S$ / ZnS. Leurs spectres d'absorbance et de photoluminescence sont représentés sur la figure I.8.

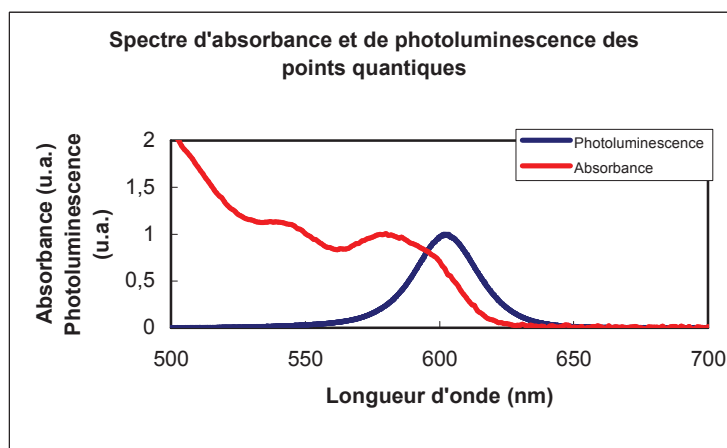


Fig. I.8 : Spectres d'absorbance (u.a.) et de photoluminescence (u.a.) des points quantiques.

III.1.2. PRÉPARATION DE LA CELLULE AVANT POLYMÉRISATION

Une goutte de la solution comprenant le monomère photopolymérisable et, éventuellement, les dopants, est ensuite placée entre deux lames de verre soigneusement nettoyées (Fig. I.9) dont l'écart est contrôlé par un système de serrage adapté. La cellule ainsi formée est maintenue à température ambiante, et à l'abri de la lumière afin de prévenir tout début de photopolymérisation incontrôlée.

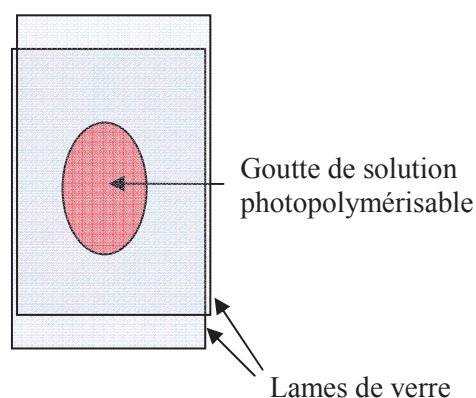


Fig. I.9: *Fabrication d'une cellule de monomère photosensible.*

La figure I.10 montre une fraction de surface de la cellule, observée au microscope optique en transmission, dans le cas d'une solution non dopée. Il s'agit ici de s'assurer que la solution contenant le monomère est suffisamment homogène. Sur cette image, on constate qu'il demeure quelques grains d'éosine mal dissous résiduels (taches sombres) pouvant nuire à la qualité du réseau de diffraction lors de la phase ultérieure de photopolymérisation. La distance typique entre grains résiduels sur ce micrographe indique néanmoins que la solution de monomère présente une homogénéité suffisante.

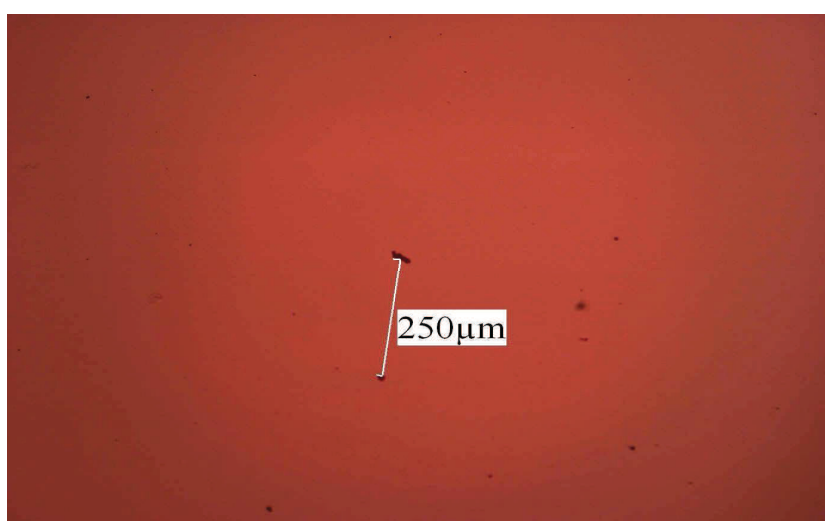


Fig. I.10 : *Image au microscope optique de la couche de monomère pur.*

Dans le cas où l'on souhaite fabriquer un réseau contenant des sources, on incorpore 20 mg de points quantiques à la solution initiale de monomère. Afin d'en assurer une dispersion homogène, on soumet la solution dopée à agitation magnétique pendant 24 h. Une fois la cellule formée, on observe la fine couche de monomère dopé au microscope afin de vérifier que les points quantiques y sont uniformément répartis.

III.2. PHOTOINSCRIPTION D'UN RESEAU HOLOGRAPHIQUE

III.2.1. DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

La couche de solution de monomère placée dans la cellule décrite ci-dessus peut maintenant être polymérisée sous l'action d'une irradiation lumineuse. Si cette irradiation présente une inhomogénéité périodique d'intensité, le degré de polymérisation présente lui aussi une inhomogénéité périodique, de même qu'est alors spatialement périodique l'indice de réfraction du photopolymère ainsi obtenu, ce qui mène à la formation d'un réseau de diffraction.

La figure I.11 présente schématiquement le montage interférentiel qui permet cette formation. L'écriture du réseau de diffraction est obtenue en faisant interférer deux faisceaux issus du même laser à argon, émettant 3 mW continus à la longueur d'onde de 514 nm. Filtres et éléments polarisants permettent de régler les intensités respectives des deux faisceaux et d'ajuster leurs états de polarisation, qui doivent les uns et les autres être identiques, afin que se forme au niveau de la couche de monomère une figure d'interférence présentant un fort taux de modulation. La période spatiale de l'onde stationnaire obtenue au croisement des deux faisceaux d'écriture dépend de la longueur d'onde d'écriture et de l'angle que font ces faisceaux entre eux.

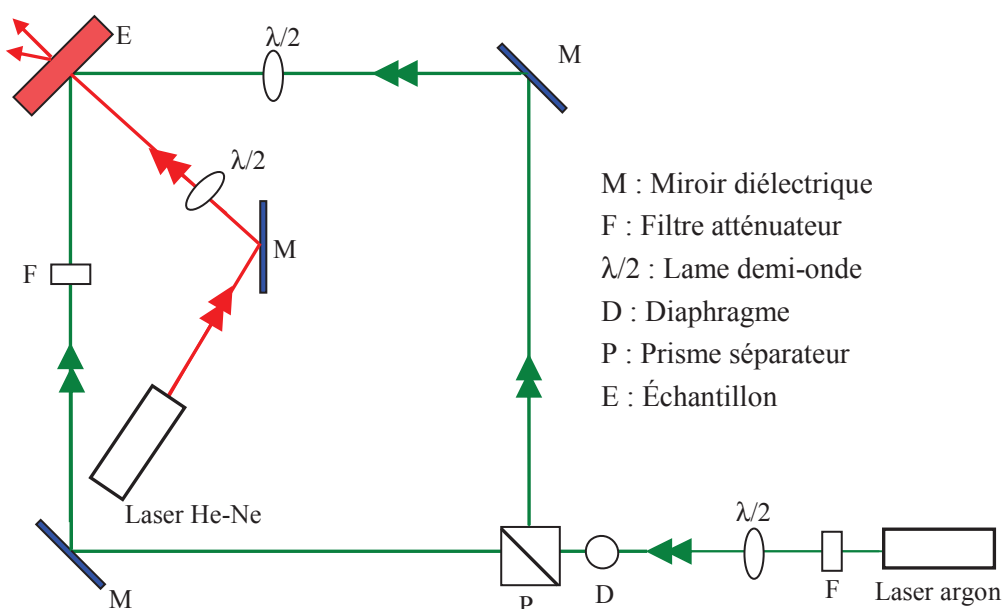


Fig. I.11 : Schéma du montage holographique employé.

On peut montrer que la photopolymérisation se produit plus rapidement et plus efficacement dans la zone exposée aux plus fortes intensités lumineuses d'écriture [Barichard 09] [Barichard 11]. Comme l'indice de réfraction augmente avec le taux de polymérisation, il se forme un réseau d'indice dans l'épaisseur de la cellule.

Un laser He-Ne suit en temps réel la formation de ce réseau d'indice. D'une puissance continue de 2 mW pour une longueur d'onde de 632,8 nm, il est pointé sur la zone de l'échantillon soumise à photopolymérisation, et vient « lire » la formation du réseau d'indice au fur et à mesure que ce dernier se forme, par la mesure des intensités réfractée et diffractée (ou rétrodiffractée).

III.2.2. RÉPARTITION DES DOPANTS DANS LE POLYMÈRE

Dans le cas des réseaux de diffraction actifs, dopés par des points quantiques, il a été montré [Barichard 09] [Barichard 10] que les dopants ont tendance à migrer par diffusion, lors de la photo-polymérisation, vers les régions de la matrice soumise aux irradiations les moins intenses.

La figure I.12 illustre ce phénomène dans le cas où l'irradiation d'une cellule de monomère a été irradiée de manière non-uniforme par l'emploi de masques périodiques. Durant la phase d'irradiation spatialement sélective, les dopants (disques rouges) migrent vers les régions non insolées, tandis que les monomères en cours de polymérisation diffusent vers les régions éclairées de la cellule. Dès lors, une distribution périodique spatiale des chaînes polymériques et des points quantiques prend naissance au cours de l'irradiation.

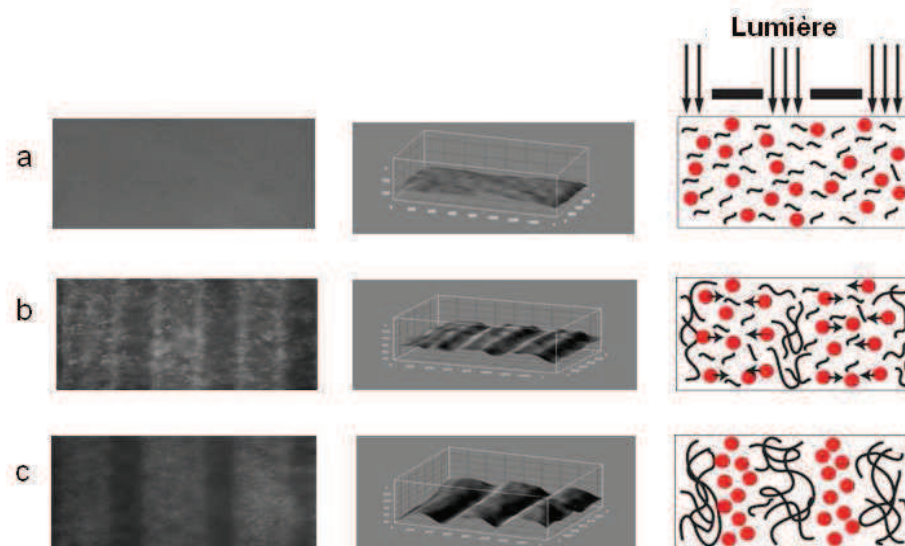


Fig. I.12 : Images en microscopie de fluorescence (à gauche), profils 3D de fluorescence (au milieu), et schémas (à droite) illustrant le processus de diffusion des QDs dans un photopolymère : a) avant irradiation ; b) après 10 minutes et c) après 20 minutes d'irradiation à 30 mW.cm^{-2} (d'après [Barichard 10]).

Dans le cas où l'irradiation se fait via un montage interférentiel tel que celui présenté sur la figure I.11, la modulation spatiale de la répartition des dopants vient se superposer à la

modulation d'indice due à la variation spatiale périodique du degré de polymérisation. La question de la position des dopants dans un réseau actif sera évoquée au chapitre IV. S'il apparaît que la distribution de la densité volumique de dopants n'est pas uniforme, il n'en reste pas moins qu'on peut la considérer continue, avec des variations périodiques. Si ces variations sont importantes, on pourra considérer que les sources se répartissent dans le réseau en lignes périodiquement et discrètement espacées. Sinon, on pourra introduire une densité volumique continue et périodique.

IV. CONCLUSION

Ce chapitre nous a permis de poser les bases de ce qui va constituer l'apport essentiel de ce travail : une modélisation tout-analytique de réseaux de diffraction épais holographiques obtenus par modulation périodique sinusoïdale de la permittivité d'un milieu diélectrique. Cette modélisation traitera les réseaux comme un tout, et nous établirons dans les chapitres qui suivent la réponse spectrale et angulaire de ces structures *en les traitant en bloc, et non pas comme des empilements multicouches*.

Dans les chapitres qui suivent, nous mettrons en œuvre cette approche, successivement dans le cas d'un réseau de diffraction en transmission unidimensionnel délimité par des interfaces diélectriques (que l'on peut assimiler à une cavité de Fabry-Pérot dans laquelle on a incorporé un réseau de diffraction) ; puis dans le cas d'un réseau bidimensionnel dont on montrera qu'il peut être considéré comme la superposition de la structure précédente et d'un miroir de Bragg ; enfin, dans le cas d'un réseau bidimensionnel dans lequel on aura dispersé des espèces actives.

Dans chacune de ces structures, on ramènera l'étude à celle de la propagation et de l'interaction de 4 ondes, co- et contra-propagatives deux par deux, qui échangent en permanence de l'énergie les unes avec les autres au cours de leur propagation. Dans une approche perturbative, ces structures seront traitées comme un tout, dont on déterminera la réponse optique *via* celle de l'opérateur d'évolution des champs puis d'une matrice caractéristique, la matrice dite de transfert du système, qui s'en déduit.

Comme pour les réseaux en transmission et en réflexion dont nous avons évoqués quelques propriétés dans ce chapitre, nous montrerons qu'un jeu de quelques paramètres — qui seront systématiquement soit des coefficients de désaccord de phase, soit des coefficients de couplage co- et/ou contra-directionnels — suffit à décrire la réponse spectrale et angulaire de ces structures.

CHAPITRE II

MODELISATION D'UN HOLOGRAMME UNIDIMENSIONNEL PASSIF

I. INTRODUCTION

Au chapitre précédent, nous avons brièvement évoqué la réponse optique d'un réseau épais de diffraction en transmission, sans terme de fond continu d'absorption ou de gain, et présenté l'évolution de son efficacité de diffraction en fonction de paramètres normalisés traduisant respectivement un désaccord de phase co-directionnel (ΔL) et un coefficient de couplage (χL).

Dans ce chapitre, nous étudions de manière approfondie une telle structure, et introduisons les formalismes et techniques de modélisation que nous étendrons, aux chapitres suivants, à des structures analogues, mais bidimensionnelles.

La structure unidimensionnelle dont nous faisons ici l'étude sera, dans ce qui suit, appelée « hologramme unidimensionnel » (ou H1D). Dans un référentiel cartésien ($Oxyz$) dont les axes sont dirigés par le système de vecteurs unitaires ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$), la structure, de symétrie parallélépipédique, est supposée de dimension infinie selon l'axe (Ox), invariante selon l'axe (Oy), et d'épaisseur finie L selon l'axe (Oz).

La permittivité diélectrique relative du milieu linéaire, isotrope, isolant et non magnétique qui la constitue consiste en un fond continu $\epsilon_m = \epsilon'_m + i\epsilon''_m$, auquel se superpose une faible modulation périodique sinusoïdale $\Delta\epsilon_r$ de période Λ_x dans la direction (Ox) :

$$\Delta\epsilon_r(\vec{r}) = \Delta\epsilon_r(x) = \epsilon'_{1x} \cos(K_x x) + i\epsilon''_{1x} \cos(K_x x - \psi_x''), \quad (\text{II.1})$$

où $K_x = 2\pi/\Lambda_x$ est la fréquence spatiale associée à la modulation périodique de permittivité.

Les termes ϵ'_{1x} et ϵ''_{1x} représentent respectivement l'amplitude de la modulation de la partie réelle de la permittivité diélectrique et celle de sa partie imaginaire. Dans le cas général, ces deux modulations peuvent *a priori* être décalées spatialement l'une par rapport à l'autre, ce que traduit la phase ψ_x'' . La modulation de la permittivité diélectrique selon l'axe (Ox) donne naissance à ce que l'on appelle communément un **réseau de diffraction en transmission**.

Les milieux entourant ce milieu holographique spatialement inhomogène sont, eux, considérés linéaires, transparents, isotropes, homogènes, isolants et non-magnétiques.

Dans ce chapitre, nous considérons la réponse de cette structure passive à une onde optique incidente. Tous les vecteurs d'onde en présence seront supposés appartenir au plan (xOz). Dans cette configuration, nous traitons naturellement les deux états de polarisation de référence TE (s) et TM (p), sur lesquels toute onde incidente, quel que soit son état de polarisation, peut être décomposée. Nous établissons qu'une onde incidente donne naissance à quatre ondes mutuellement couplées — une onde réfléchie, une onde transmise, une onde diffractée et une onde rétrodiffractée — et gouvernées, en première approximation, par un système de quatre équations différentielles (ou *équations d'évolution* spatiales) couplées du premier ordre. En notation matricielle, l'opérateur

d'évolution correspondant est alors diagonalisé, ce qui nous permet de déterminer les modes propres de l'H1D « nu » et sa matrice de transfert. La prise en compte des interfaces (coefficients de Fresnel) permet alors d'établir la matrice de transfert globale de la structure, et d'en déduire des coefficients de répartition énergétiques (de réflexion, transmission, diffraction et rétrodiffraction) dont nous étudions la dépendance spectrale et angulaire, ainsi que la sensibilité aux caractéristiques géométriques et structurales de l'H1D.

II. PRINCIPES DE CALCUL FONDAMENTAUX

II.1. ÉQUATION DE PROPAGATION

II.1.1. ÉQUATIONS DE MAXWELL

Les calculs présentés dans ce manuscrit s'appuient sur les équations fondamentales de l'Électromagnétisme, les équations de Maxwell, que l'on peut écrire, pour des ondes monochromatiques se propageant dans un milieu **linéaire**, de permittivité diélectrique absolue ε (F.m⁻¹) et de perméabilité magnétique absolue μ (H.m⁻¹), et dont la réponse est supposée instantanée :

$$\text{Maxwell-Gauss électrique} \quad \text{div } \vec{D}(\vec{r}, t) = \text{div} [\varepsilon \vec{E}(\vec{r}, t)] = \rho(\vec{r}, t), \quad (\text{II.2a})$$

$$\text{Maxwell-Gauss magnétique} \quad \text{div } \vec{B}(\vec{r}, t) = \text{div} [\mu \vec{H}(\vec{r}, t)] = 0, \quad (\text{II.2b})$$

$$\text{Maxwell-Faraday} \quad \vec{\text{rot}} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (\text{II.2c})$$

$$\text{Maxwell-Ampère} \quad \vec{\text{rot}} \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (\text{II.2d})$$

où \vec{D} , \vec{B} , \vec{E} et \vec{H} sont respectivement l'induction (ou déplacement) électrique (C.m⁻²), l'induction magnétique (T), le champ électrique (V.m⁻¹) et le champ magnétique (A.m⁻¹). Les grandeurs ρ et \vec{j} représentent respectivement, quant à elles, la densité volumique de charges libres (C.m⁻³), et la densité de courant libre (A.m⁻²) qui y règnent.

Dans toute la suite, les milieux rencontrés seront considérés **non magnétiques**, **isotropes**, **stationnaires**, **isolants** (sans charges électriques libres), mais éventuellement inhomogènes. Dans ces conditions, ε et μ sont des scalaires indépendants du temps, avec en outre $\mu = \mu_0$, où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide. Par ailleurs, on prend également $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$. Les équations de Maxwell peuvent alors s'écrire avec les seuls champs \vec{E} et \vec{H} , sous la forme :

$$\text{Maxwell-Gauss électrique :} \quad \text{div} [\varepsilon \vec{E}(\vec{r}, t)] = 0, \quad (\text{II.3a})$$

$$\text{Maxwell-Gauss magnétique :} \quad \text{div } \vec{H}(\vec{r}, t) = 0, \quad (\text{II.3b})$$

$$\text{Maxwell-Faraday :} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (\text{II.3c})$$

$$\text{Maxwell-Ampère :} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H}(\vec{r}, t) = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (\text{II.3d})$$

II.1.2. ÉQUATIONS DE PROPAGATION EN POLARISATIONS TE ET TM

En combinant les équations (II.3c) et (II.3d), on obtient une équation de propagation d'onde portant sur le vecteur champ électrique :

$$\Delta \vec{E} - \overrightarrow{\text{grad}} [\text{div} \vec{E}] - \varepsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}, \quad (\text{II.4})$$

où les dépendances spatiale et temporelle du champ ont été omises pour simplifier les notations. Dans cette équation, le terme $\overrightarrow{\text{grad}} [\text{div} \vec{E}]$ n'est pas *a priori* nul : en effet, sauf cas particuliers, de par l'identité $\text{div} [\varepsilon \vec{E}] = \overrightarrow{\text{grad}} \varepsilon \cdot \vec{E} + \varepsilon \text{div} \vec{E} = 0$, l'équation (II.3a) n'implique l'annulation de $\text{div} \vec{E}$, et donc celle de $\overrightarrow{\text{grad}} [\text{div} \vec{E}]$, que si l'égalité $\overrightarrow{\text{grad}} \varepsilon \cdot \vec{E} = 0$ est vérifiée, ce qui n'est pas forcément le cas dans un milieu présentant une inhomogénéité de permittivité diélectrique.

Dans ce qui suit, nous considérerons des structures pour lesquelles cette permittivité est modulée spatialement dans le plan (xOz) qui est également le plan d'incidence des ondes électromagnétiques. Dès lors, $\overrightarrow{\text{grad}} \varepsilon$ appartient à ce même plan et on est amené à distinguer les deux cas de polarisation fondamentaux TE (s) et TM (p).

Lorsque l'onde optique incidente est polarisée dans l'état de polarisation TE (s), son champ électrique $\vec{E} = E \vec{e}_y$ est transversal, perpendiculaire au plan d'incidence (xOz), qui contient le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} \varepsilon$. L'expression $\overrightarrow{\text{grad}} [\text{div} \vec{E}]$ s'annule alors.

En notant $\varepsilon = \varepsilon_r(x) \varepsilon_0$, où $\varepsilon_r(x)$ est la permittivité diélectrique relative du milieu, et en rappelant que $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, on constate que l'équation de propagation (II.4) se ramène à une équation scalaire portant sur E :

$$\Delta E - \frac{1}{c^2} \varepsilon_r(x) \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{II.5})$$

Pour une onde optique incidente polarisée dans l'état de polarisation TM (p), en revanche, le champ électrique \vec{E} est dans le plan (xOz), et le terme $\overrightarrow{\text{grad}} \varepsilon \cdot \vec{E}$ ne s'annule en général pas. L'expression $\overrightarrow{\text{grad}} [\text{div} \vec{E}]$ est par conséquent non-nulle et l'équation de propagation d'onde portant sur le vecteur champ électrique demeure vectorielle :

$$\Delta \vec{E} - \overrightarrow{\text{grad}} [\text{div} \vec{E}] - \frac{1}{c^2} \varepsilon_r(x) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}. \quad (\text{II.6})$$

II.1.3. FORME DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE PROPAGATION

Dans tout ce manuscrit, la dépendance temporelle des champs des ondes électromagnétiques en présence sera en $e^{i\omega t}$. Nous recherchons des solutions de l'équation de propagation en ondes propagatives harmoniques, quasi-planes, et monochromatiques, de pulsation ω , de forme générique [Pérez 96] :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(z) \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})], \quad (\text{II.7})$$

où \vec{k} représente le vecteur d'onde situé dans le plan (xOz).

Lorsque l'onde optique incidente est polarisée dans l'état TE, l'amplitude de son champ électrique prend la forme :

$$\vec{E}_0(z) = E_0(z) \vec{e}_y, \quad (\text{II.8})$$

tandis qu'en polarisation TM, elle s'écrit de manière générale :

$$\vec{E}_0(z) = E_{0x}(z) \vec{e}_x + E_{0z}(z) \vec{e}_z. \quad (\text{II.9})$$

II.2. HYPOTHESES ET FORMALISMES DE CALCUL

Les calculs qui forment l'armature des modélisations présentées dans ce manuscrit s'appuient sur un certain nombre d'hypothèses, d'approximations et de formalismes que nous présentons brièvement dans ce qui suit.

II.2.1. THÉORIE DES ONDES COUPLÉES

La réponse optique des réseaux de diffraction obtenus par modulation périodique de la permittivité d'un milieu massif a reçu beaucoup d'attention, depuis les travaux de Burckhardt [Burckhardt 66] ou de Gabor [Gabor 68] jusqu'à aujourd'hui. Nous nous appuyons ici sur l'approche fructueuse développée par Herwig Kogelnik dans un article [Kogelnik 69] qui a inspiré de très nombreuses contributions au cours des dernières décennies — dont la nôtre.

Dans cette approche, qui constitue une alternative à celle de Floquet-Bloch, l'équation de propagation des ondes électromagnétiques est ramenée à un jeu d'équations différentielles couplées reliant les amplitudes des diverses ondes co- et contra-directionnelles qui se propagent dans une structure périodique. L'approche de Kogelnik est particulièrement adaptée aux structures unidimensionnelles périodiques (que l'on peut également qualifier de cristaux photoniques unidimensionnels) de taille finie, mais, comme l'illustrent les résultats présentés dans ce travail, elle peut être étendue au cas de structures périodiques bidimensionnelles.

Ce formalisme fait paraître un jeu de paramètres physiques qui gouvernent la réponse d'une structure périodique — paramètres qui s'interprètent aisément en termes de *désaccord* des vecteurs d'onde en présence vis-à-vis d'une condition, dite condition de résonance de Bragg, dictée par la périodicité de la structure, et en termes de *constantes de couplage* qui traduisent les échanges continus d'énergie entre ondes co- et contra-directionnelles tout au long de leur propagation.

II.2.2. APPROXIMATION DES ENVELOPPES LENTEMENT VARIABLES

Comme on le fait classiquement en Optique, notamment pour des ondes à spectre étroit, nous adoptons l'approximation des enveloppes lentement variables. Ici, cette approximation signifie que l'amplitude $E_0(z)$ de l'équation (II.7) varie peu à l'échelle de la longueur d'onde, et a pour conséquence que les dérivées spatiales d'ordre 2 des amplitudes des champs en présence dans les structures que nous étudions seront négligées. Dans des hologrammes tels que ceux que nous étudions dans ce travail, nous verrons que cette hypothèse est à relier au fait qu'à l'échelle de la longueur d'onde, l'échange d'énergie entre les ondes en présence est lent, de même que les éventuelles pertes (ou le gain) du milieu holographique [Kogelnik 69] [Mallick 90].

II.2.3. HYPOTHÈSE DU RÉSEAU ÉPAIS

Dans cette hypothèse, l'épaisseur du réseau, dans la direction de propagation des ondes — ici, l'axe (Oz) — est supposée nettement supérieure (d'au moins un ordre de grandeur) à son pas. Dans ces conditions, on parle de régime de diffraction de Bragg, par analogie avec la diffraction des rayons X par les atomes d'un cristal, et seuls les ordres 0 et 1 de diffraction sont pris en compte, les ordres supérieurs étant d'intensité relative négligeable devant eux [Mallick 90].

Dans ce travail, nous ne considérerons donc que ces deux ordres de diffraction dans nos calculs.

II.2.4. APPROCHE PERTURBATIVE

Bien que l'application du formalisme des modes couplés ne suppose pas nécessairement que la modulation d'indice soit faible, cette dernière hypothèse simplifie nos calculs, et est justifiée par les faibles variations d'indice que l'on peut observer dans des matrices polymériques dans lesquelles un réseau épais a été inscrit par une méthode holographique.

C'est pourquoi nous considérerons dans ce qui suit que les ondes qui se propagent dans l'hologramme « voient » essentiellement un milieu de permittivité diélectrique relative ϵ_m , qui n'est autre que le fond continu de permittivité. La faible modulation d'amplitude $\Delta\epsilon_r(\vec{r})$ ne constitue alors qu'une perturbation dont l'introduction, sous la forme $\epsilon = \epsilon_0 [\epsilon_m + \Delta\epsilon_r(\vec{r})]$, dans l'équation de propagation (II.4) mène naturellement, dans le cours du calcul, aux constantes de couplage rendant compte des échanges d'énergie entre ondes.

II.2.5. FORMALISME MATRICIEL

La résolution tout-analytique de l'équation de propagation, dans le cadre des hypothèses simplificatrices (enveloppes lentement variables, approche perturbative) énoncées ci-dessus, permet classiquement de décrire une structure telle que celles que nous étudions à travers l'écriture d'une matrice qui relie les valeurs des champs en divers points de cette structure.

Plusieurs formalismes matriciels, tous équivalents, sont possibles : formalisme de Jones, formalisme des matrices de répartition (qui relient les champs entrants aux champs sortants),

ou encore formalisme des matrices de transfert, qui est celui que nous avons adopté dans la formulation de Yariv et de Yeh [Yariv 84].

La figure II.1 illustre la manière dont une telle matrice, notée ici $[M]$, relie les uns aux autres les champs en présence. Dans les structures que nous étudions dans ce manuscrit (réseaux holographiques uni- et bidimensionnels), nous verrons que quatre ondes en interaction se propagent, dont les amplitudes seront désignées par les notations génériques E_R^+ , E_R^- , E_S^+ et E_S^- , dans lesquelles les exposants '+' et '-' se réfèrent au sens de propagation le long de l'axe (Oz), et où la signification des indices 'R' et 'S' sera explicitée plus loin.

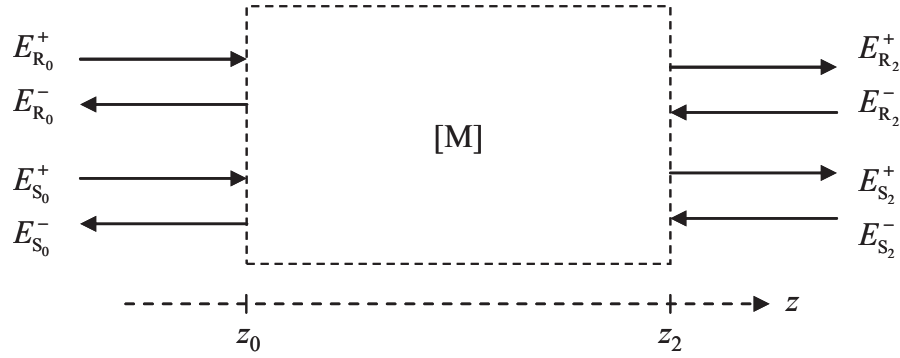


Fig. II.1 : Matrice de transfert (4×4) et les champs qu'elle relie.

Les amplitudes spécifiques apparaissant sur la figure font référence à l'abscisse à laquelle ces champs sont évalués, avec par exemple $E_{R_0}^+ = E_R^+(z_0)$. La matrice de transfert $[M]$ relie ici les amplitudes des champs à l'abscisse $z = z_0$ à celles de ces mêmes champs à l'abscisse $z = z_2$, avec $z_0 < z_2$ (ces deux abscisses définissant par exemple les extrémités gauche et droite de la structure). Plus précisément, dans la notation de Yariv et Yeh, on écrit :

$$\begin{pmatrix} E_{R_0}^+ \\ E_{R_0}^- \\ E_{S_0}^+ \\ E_{S_0}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{R_2}^+ \\ E_{R_2}^- \\ E_{S_2}^+ \\ E_{S_2}^- \end{pmatrix}. \quad (\text{II.10})$$

La prise en compte des conditions aux limites aux extrémités de la structure se fait *via* l'introduction de matrices d'extrémité de même forme et dimension (4×4) que $[M]$.

Si par exemple l'on note $[A]$ et $[B]$ les matrices d'extrémité aux abscisses $z = z_0$ et $z = z_2$, la matrice de transfert globale de l'hologramme, extrémités comprises, s'obtient par simple produit matriciel en cascade, de gauche à droite : $[A] [M] [B]$. Avec ce formalisme, les coefficients de réflexion, de transmission, ou encore de (rétro-) diffraction du réseau holographique s'expriment très simplement en fonction des éléments de la matrice de transfert $[M]$ et de ceux des matrices d'extrémité.

III. ÉTUDE TOUT-ANALYTIQUE DE L'HOLOGRAMME 1D

Nous avons vu (§ II.1) que la permittivité diélectrique relative spatialement modulée de l'hologramme unidimensionnel de fréquence spatiale K_x s'écrit :

$$\varepsilon_r(\vec{r}) = \varepsilon_r(x) = \varepsilon'_m + i\varepsilon''_m + \Delta\varepsilon_r(x) = \varepsilon'_m + i\varepsilon''_m + \varepsilon'_{1x} \cos(K_x x) + i\varepsilon''_{1x} \cos(K_x x - \psi''_x), \quad (\text{II.11})$$

que l'on peut réécrire sous la forme suivante :

$$\varepsilon_r(\vec{r}) = \varepsilon'_m + i\varepsilon''_m + \frac{\varepsilon'_{1x}}{2} \exp(-iK_x x) + \frac{\tilde{\varepsilon}'_{1x}}{2} \exp(iK_x x), \quad (\text{II.12})$$

où les modulations de permittivité complexes ε_{1x} et $\tilde{\varepsilon}_{1x}$ sont définies par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1x} &= \varepsilon'_{1x} + i\varepsilon''_{1x} \exp(i\psi''_x) \\ \tilde{\varepsilon}_{1x} &= \varepsilon'_{1x} + i\varepsilon''_{1x} \exp(-i\psi''_x) \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

L'hologramme unidimensionnel (Fig. II.2), d'indice de réfraction réel moyen $n_m = \sqrt{\varepsilon'_m}$, est entouré de deux milieux homogènes *a priori* différents, d'indices respectifs n_0 et n_2 . Dans toute la suite, les interfaces séparant ces milieux de l'hologramme seront notées A et B.

Dans le régime de diffraction de Bragg, où l'on ne considère qu'un seul ordre de diffraction, quatre ondes sont présentes dans l'H1D (une onde réfractée de l'onde incidente, une onde réfléchie, une onde diffractée et une onde rétrodiffractée), dont les vecteurs d'ondes sont représentés ci-dessous (Fig. II.2). Nous adoptons une notation classique [Kogelnik 69] [Mallick 90] en indiquant « R » (pour « *reference* ») les ondes incidente et réfléchie, et « S » (pour « *scattered* ») les ondes diffractée et rétrodiffractée. Les exposants « + » et « - » se réfèrent, nous l'avons vu, au sens de propagation de ces ondes par rapport au sens positif de l'axe (Oz).

Pour une onde optique de référence, incidente sur l'H1D, de vecteur champ électrique $\vec{E}_{R_0}^+$ et de vecteur d'onde $\vec{k}_{R_0}^+$, se propageant de gauche à droite dans le milieu incident d'indice n_0 , la première interface donne naissance à une onde réfléchie, de vecteur champ électrique $\vec{E}_{R_0}^-$ et de vecteur d'onde $\vec{k}_{R_0}^-$, et à une onde réfractée dans l'hologramme, de vecteur champ électrique $\vec{E}_{R_1}^+$ et de vecteur d'onde $\vec{k}_{R_1}^+$. Une onde diffractée prend par ailleurs naissance dans le milieu holographique, de vecteur champ électrique $\vec{E}_{S_1}^+$ et de vecteur d'onde $\vec{k}_{S_1}^+$. Lorsque l'onde de référence réfractée et l'onde diffractée parviennent sur l'interface B, une onde de référence réfléchie est créée, de vecteur champ électrique $\vec{E}_{R_1}^-$ et de vecteur d'onde $\vec{k}_{R_1}^-$, ainsi qu'une onde rétrodiffractée, de vecteur champ électrique $\vec{E}_{S_1}^-$ et de vecteur d'onde $\vec{k}_{S_1}^-$.

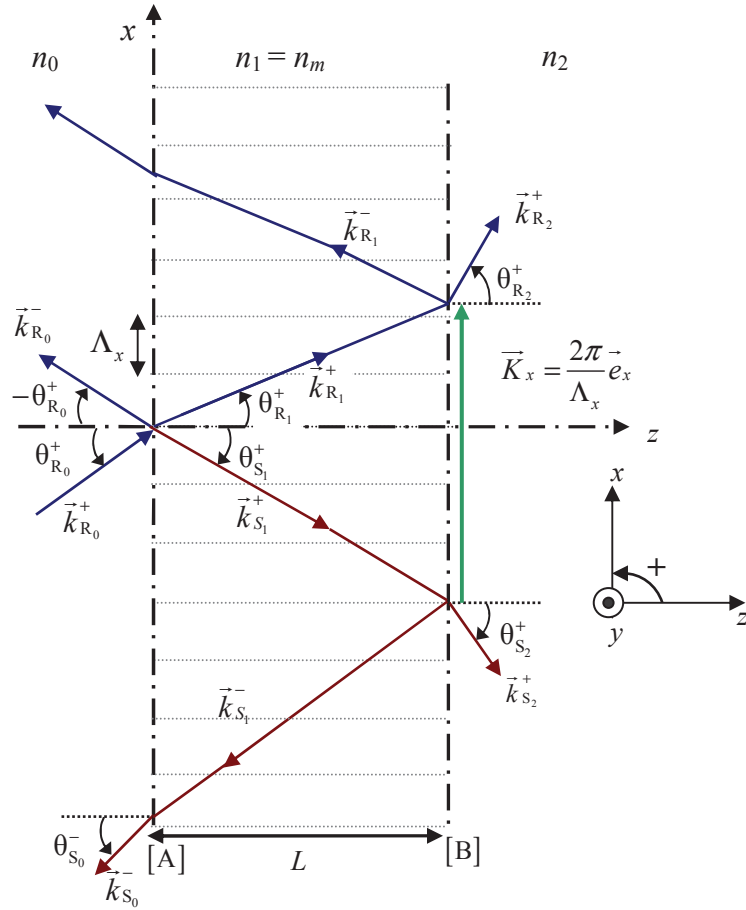


Fig. II.2 : Représentation schématique des ondes en présence dans l'hologramme 1D d'épaisseur L et de période spatiale Λ_x .

Nous nous intéresserons plus loin aux coefficients de réflexion, diffraction et rétrodiffraction de la structure, qui se calculent à partir du champ incident $\vec{E}_{R_0}^+$ et des champs des ondes sortantes, qui sont, en $z = L$, l'onde transmise, de vecteur champ électrique $\vec{E}_{R_2}^+$ et de vecteur d'onde $\vec{k}_{R_2}^+$, et l'onde diffractée, de vecteur champ électrique $\vec{E}_{S_2}^+$ et de vecteur d'onde $\vec{k}_{S_2}^+$; et en $z = 0$, l'onde réfléchie de vecteur champ électrique $\vec{E}_{R_0}^-$ et de vecteur d'onde $\vec{k}_{R_0}^-$, et l'onde rétrodiffractée de vecteur champ électrique $\vec{E}_{S_0}^-$ et de vecteur d'onde $\vec{k}_{S_0}^-$.

Dans l'hologramme, la conservation de l'impulsion implique une relation entre le vecteur d'onde $\vec{k}_{R_1}^+$ de l'onde de référence réfractée interne, celui, $\vec{k}_{S_1}^+$, de l'onde diffractée interne, et le vecteur d'onde \vec{K}_x caractéristique du réseau en transmission :

$$\vec{k}_{R_1}^+ = \vec{k}_{S_1}^+ + \vec{K}_x. \quad (\text{II.14})$$

Une relation similaire relie naturellement le vecteur d'onde $\vec{k}_{R_1}^-$ de l'onde de référence réfléchie, le vecteur d'onde $\vec{k}_{S_1}^-$ de l'onde rétrodiffractée interne, et \vec{K}_x :

$$\vec{k}_{R_1}^- = \vec{k}_{S_1}^- + \vec{K}_x. \quad (\text{II.15})$$

Ces divers vecteurs d'onde peuvent être exprimés dans le référentiel (Oxyz) en fonction des paramètres aisément identifiables que sont la fréquence angulaire ω de l'onde, les indices de réfraction des milieux traversés et les angles d'inclinaison que ces vecteurs font avec l'axe (Oz). Notons que les valeurs de tous les angles intervenant dans ces calculs sont algébriques, leur signe se référant au sens trigonométrique positif usuel.

Ainsi, les vecteurs d'onde des différentes ondes « R » en présence ont pour composantes :

$$\begin{aligned} \vec{k}_{R_0}^+ &= \begin{pmatrix} \gamma_x = k_{R_0} \sin \theta_{R_0}^+ \\ 0 \\ \beta_{R_0} = k_{R_0} \cos \theta_{R_0}^+ \end{pmatrix}, & \vec{k}_{R_0}^- &= \begin{pmatrix} \gamma_x = k_{R_0} \sin \theta_{R_0}^+ \\ 0 \\ -\beta_{R_0} = -k_{R_0} \cos \theta_{R_0}^+ \end{pmatrix}, \\ \vec{k}_{R_1}^+ &= \begin{pmatrix} \gamma_x = k_{R_1} \sin \theta_{R_1}^+ \\ 0 \\ \beta_1 = k_{R_1} \cos \theta_{R_1}^+ \end{pmatrix}, & \vec{k}_{R_1}^- &= \begin{pmatrix} \gamma_x = k_{R_1} \sin \theta_{R_1}^+ \\ 0 \\ -\beta_1 = -k_{R_1} \cos \theta_{R_1}^+ \end{pmatrix}, \\ \vec{k}_{R_2}^+ &= \begin{pmatrix} \gamma_x = k_{R_2} \sin \theta_{R_2}^+ \\ 0 \\ \beta_{R_2} = k_{R_2} \cos \theta_{R_2}^+ \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

Dans ces expressions, on vérifie aux interfaces la relation de conservation de la composante tangentielle — ici, la composante γ_x parallèle à l'axe (Ox) — des vecteurs d'ondes en présence, dont on a par ailleurs introduit les normes respectives, avec :

$$\begin{aligned} k_{R_0} &= \|\vec{k}_{R_0}^+\| = \|\vec{k}_{R_0}^-\| = \sqrt{\gamma_x^2 + \beta_{R_0}^2} = \frac{\omega}{c} n_0 = k_0 n_0, \\ k_{R_1} &= \|\vec{k}_{R_1}^+\| = \|\vec{k}_{R_1}^-\| = \sqrt{\gamma_x^2 + \beta_1^2} = \frac{\omega}{c} n_m = k_0 n_m, \\ k_{R_2} &= \|\vec{k}_{R_2}^+\| = \sqrt{\gamma_x^2 + \beta_{R_2}^2} = \frac{\omega}{c} n_2 = k_0 n_2, \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

où l'on pose $k_0 = \omega / c$.

Les relations entre les différents angles en présence sont simplement obtenues par la loi de Snell-Descartes de la réfraction, conséquence de la conservation de la composante tangentielle des vecteurs d'ondes, avec ici :

$$n_0 \sin \theta_{R_0}^+ = n_m \sin \theta_{R_1}^+ = n_2 \sin \theta_{R_2}^+. \quad (\text{II.18})$$

Pour les différentes ondes « S », on obtient, de manière similaire :

$$\begin{aligned}
 \vec{k}_{S_0}^- &= \begin{pmatrix} \gamma_x - K_x = k_{S_0} \sin \theta_{S_0}^- \\ 0 \\ -\beta_{S_0} = -k_{S_0} \cos \theta_{S_0}^- \end{pmatrix}, \\
 \vec{k}_{S_1}^+ &= \begin{pmatrix} \gamma_x - K_x = k_{S_1} \sin \theta_{S_1}^+ \\ 0 \\ \beta_1 = k_{S_1} \cos \theta_{S_1}^+ = k_{R_1} \cos \theta_{R_1}^+ \end{pmatrix}, & \vec{k}_{S_1}^- &= \begin{pmatrix} \gamma_x - K_x = k_{S_1} \cos \theta_{S_1}^+ \\ 0 \\ -\beta_1 = -k_{S_1} \cos \theta_{S_1}^+ = -k_{R_1} \cos \theta_{R_1}^+ \end{pmatrix}, \\
 \vec{k}_{S_2}^+ &= \begin{pmatrix} \gamma_x - K_x = k_{S_2} \sin \theta_{S_2}^+ \\ 0 \\ \beta_{S_2} = k_{S_2} \cos \theta_{S_2}^+ \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{II.19}$$

Ici encore, la relation de conservation de la composante tangentielle — la composante $(\gamma_x - K_x)$ parallèle à l'axe (Ox) — des vecteurs d'ondes est vérifiée, les normes de ces vecteurs étant :

$$\begin{aligned}
 k_{S_0} &= \|\vec{k}_{S_0}^-\| = \sqrt{(\gamma_x - K_x)^2 + \beta_{S_0}^2} = \frac{\omega}{c} n_0 = k_0 n_0, \\
 k_{S_1} &= \|\vec{k}_{S_1}^+\| = \|\vec{k}_{S_1}^-\| = \sqrt{(\gamma_x - K_x)^2 + \beta_1^2}, \\
 k_{S_2} &= \|\vec{k}_{S_2}^+\| = \sqrt{(\gamma_x - K_x)^2 + \beta_{S_2}^2} = \frac{\omega}{c} n_2 = k_0 n_2.
 \end{aligned} \tag{II.20}$$

On notera qu'au signe près, les quatre ondes en présence dans le milieu holographique ont la même composante $\pm \beta_1$ selon l'axe (Oz), ce qui résulte des relations (II.14)-(II.15). Par ailleurs, dans les milieux homogènes de part et d'autre de l'hologramme proprement dit, les ondes « R » et « S » ont des vecteurs d'ondes de même norme, avec $k_{R_0} = k_{S_0} = n_0 k_0$ et $k_{R_2} = k_{S_2} = n_2 k_0$.

En revanche, dans le cas général, les vecteurs d'ondes des ondes « R » et « S » dans le milieu holographique inhomogène ne sont pas de même module, et $k_{R_1} \neq k_{S_1}$.

En conséquence, la loi de Snell-Descartes de la réfraction ne régit pas la relation entre les trois angles $\theta_{S_0}^-$, $\theta_{S_1}^+$ et $\theta_{S_2}^+$. Plus précisément, on a, sauf cas particulier :

$$n_0 \sin \theta_{S_0}^- = n_2 \sin \theta_{S_2}^+ \neq n_m \sin \theta_{S_1}^+. \tag{II.21}$$

Le cas particulier où l'on a égalité entre ces trois expressions correspond à la condition $k_{R_1} = k_{S_1}$, et à un angle d'incidence $\theta_{R_0}^+$ particulier appelé « angle de Bragg ».

Nous reviendrons sur cette notion et sur ces relations angulaires lorsque nous nous intéresserons aux coefficients de répartition énergétiques et à la réponse de l'H1D dans la partie IV du chapitre.

III.1. OPERATEUR D'EVOLUTION ET PARAMETRES COUPLONIQUES

III.1.1. CAS DE LA POLARISATION INCIDENTE TE

La figure II.3 ci-dessous reprend la géométrie de l'hologramme proprement dit, avec quatre ondes en présence, dont les champs électriques sont, en polarisation TE, tous colinéaires et dirigés selon l'axe (Oy) du référentiel (Oxyz).

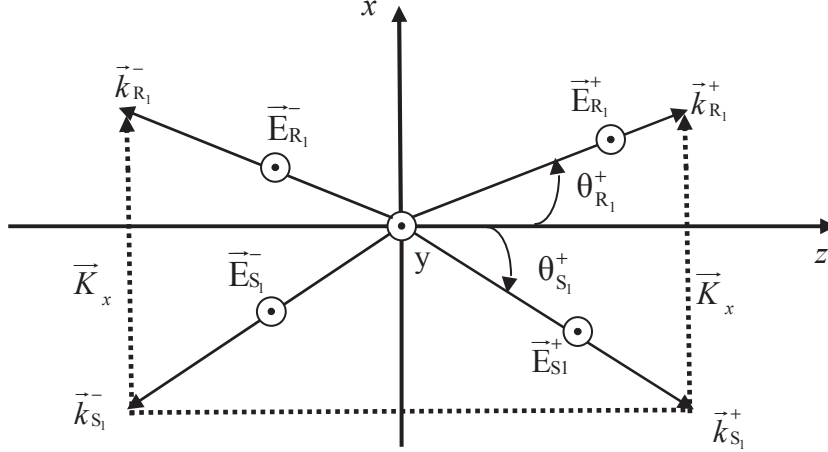


Fig. II.3 : Géométrie des ondes en présence dans l'H1D en polarisation TE

Les quatre champs optiques présents dans le milieu holographique prennent la forme générique (II.7), avec ici :

$$\vec{E}_{R_1}^+(\vec{r}, t) = R^+(z) \exp[i(\omega t - \vec{k}_{R_1}^+ \cdot \vec{r})] \vec{e}_y, \quad (\text{II.22.a})$$

$$\vec{E}_{R_1}^-(\vec{r}, t) = R^-(z) \exp[i(\omega t - \vec{k}_{R_1}^- \cdot \vec{r})] \vec{e}_y, \quad (\text{II.22.b})$$

$$\vec{E}_{S_1}^+(\vec{r}, t) = S^+(z) \exp[i(\omega t - \vec{k}_{S_1}^+ \cdot \vec{r})] \vec{e}_y, \quad (\text{II.22.c})$$

$$\vec{E}_{S_1}^-(\vec{r}, t) = S^-(z) \exp[i(\omega t - \vec{k}_{S_1}^- \cdot \vec{r})] \vec{e}_y, \quad (\text{II.22.d})$$

où R^+ , R^- , S^+ et S^- sont respectivement les amplitudes lentement variables des champs de l'onde de référence interne à l'H1D, de son onde réfléchie, et des ondes diffractée et rétrodiffractée. Le champ électrique total à l'intérieur de l'H1D est donc la somme vectorielle de ces quatre champs :

$$\begin{aligned} \vec{E}_T(\vec{r}, t) &= E_T(\vec{r}, t) \vec{e}_y = \vec{E}_{R_1}^+(\vec{r}, t) + \vec{E}_{R_1}^-(\vec{r}, t) + \vec{E}_{S_1}^+(\vec{r}, t) + \vec{E}_{S_1}^-(\vec{r}, t) \\ &= \left[R^+(z) e^{-i\vec{k}_{R_1}^+ \cdot \vec{r}} + R^-(z) e^{-i\vec{k}_{R_1}^- \cdot \vec{r}} + S^+(z) e^{-i\vec{k}_{S_1}^+ \cdot \vec{r}} + S^-(z) e^{-i\vec{k}_{S_1}^- \cdot \vec{r}} \right] e^{i\omega t} \vec{e}_y. \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

Comme nous l'avons vu, les quatre champs étant colinéaires dans cet état de polarisation, l'équation de propagation portant sur le champ total se ramène à une relation scalaire, qui, pour des ondes harmoniques, prend la forme simple d'une équation de Helmholtz :

$$\Delta E_T(\vec{r}, t) + k_0^2 \varepsilon_r(x) E_T(\vec{r}, t) = \frac{\partial^2 E_T(\vec{r}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_T(\vec{r}, t)}{\partial z^2} + k_0^2 \varepsilon_r(x) E_T(\vec{r}, t) = 0. \quad (\text{II.24})$$

En reportant l'expression du champ total et celle de la permittivité diélectrique relative modulée dans l'équation de propagation de Helmholtz, on obtient une équation différentielle du second ordre. Par regroupement et identification des termes de mêmes fréquences spatiales, cette relation se ramène au système suivant de quatre équations différentielles linéaires du second ordre couplées :

$$\left[\frac{d^2 R^+(z)}{dz^2} - 2i\beta_1 \frac{dR^+(z)}{dz} + \left\{ -(\gamma_x^2 + \beta_1^2) + k_0^2 (\varepsilon'_m + i\varepsilon''_m) \right\} R^+(z) + k_0^2 \frac{\varepsilon_{1x}}{2} S^+(z) \right] \times \exp[-i(\gamma_x x + \beta_1 z)] = 0 \quad (\text{II.25a})$$

$$\left[\frac{d^2 R^-(z)}{dz^2} + 2i\beta_1 \frac{dR^-(z)}{dz} + \left\{ -(\gamma_x^2 + \beta_1^2) + k_0^2 (\varepsilon'_m + i\varepsilon''_m) \right\} R^-(z) + k_0^2 \frac{\varepsilon_{1x}}{2} S^-(z) \right] \times \exp[-i(\gamma_x x - \beta_1 z)] = 0 \quad (\text{II.25b})$$

$$\left[\frac{d^2 S^+(z)}{dz^2} - 2i\beta_1 \frac{dS^+(z)}{dz} - \left\{ (\gamma_x - K_x)^2 + \beta_1^2 \right\} S^+(z) + k_0^2 \left\{ (\varepsilon'_m + i\varepsilon''_m) S^+(z) + \frac{\tilde{\varepsilon}_{1x}}{2} R^+(z) \right\} \right] \times \exp[-i((\gamma_x - K_x)x + \beta_1 z)] = 0 \quad (\text{II.25c})$$

$$\left[\frac{d^2 S^-(z)}{dz^2} + 2i\beta_1 \frac{dS^-(z)}{dz} - \left\{ (\gamma_x - K_x)^2 - \beta_1^2 \right\} S^-(z) + k_0^2 \left\{ (\varepsilon'_m + i\varepsilon''_m) S^-(z) + \frac{\tilde{\varepsilon}_{1x}}{2} R^-(z) \right\} \right] \times \exp[-i((\gamma_x - K_x)x - \beta_1 z)] = 0 \quad (\text{II.25d})$$

Dans chacune de ces quatre équations, l'identité $k_0^2 \varepsilon'_m = \gamma_x^2 + \beta_1^2$ permet de simplifier les expressions. Par ailleurs, dans le cadre de l'approximation des enveloppes lentement variables, les dérivées partielles d'ordre 2 des amplitudes des champs sont négligées, et l'équation de propagation se ramène à un système de quatre équations de propagation (ou d'évolution spatiale) couplées du premier ordre portant sur les enveloppes des champs en présence, que l'on peut écrire sous la forme matricielle suivante :

$$i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} R^+ \\ R^- \\ S^+ \\ S^- \end{pmatrix} = \frac{1}{2\beta_1} \begin{pmatrix} k_0^2 i \varepsilon''_m & 0 & k_0^2 \frac{\varepsilon_{1x}}{2} & 0 \\ 0 & -k_0^2 i \varepsilon''_m & 0 & -k_0^2 \frac{\varepsilon_{1x}}{2} \\ k_0^2 \frac{\tilde{\varepsilon}_{1x}}{2} & 0 & -K_x(K_x - 2\gamma_x) + k_0^2 i \varepsilon''_m & 0 \\ 0 & -k_0^2 \frac{\tilde{\varepsilon}_{1x}}{2} & 0 & -(-K_x(K_x - 2\gamma_x) + k_0^2 i \varepsilon''_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^+ \\ R^- \\ S^+ \\ S^- \end{pmatrix}. \quad (\text{II.26})$$

Cette formulation fait naturellement apparaître un certain nombre des paramètres « couploniques » (tous de dimension m^{-1}) dont il a été question au chapitre I. Ainsi, chacune des équations met en jeu un terme de variation relative de l'amplitude d'un champ proportionnelle à la

distance parcourue le long de l'axe (Oz). Le coefficient de proportionnalité, que nous noterons α , est défini par :

$$\alpha = \frac{k_0^2 \varepsilon_m''}{2\beta_1}, \quad (\text{II.27})$$

et il s'agit, selon le signe de la partie imaginaire ε_m'' du fond continu de permittivité du milieu, d'un **coefficient linéique d'absorption ou de gain**.

De même, les équations d'évolution des enveloppes des ondes diffractée (S^+) et rétrodiffractée (S^-) font apparaître un **coefficient de désaccord de phase co-directionnel** Δ entre leur vecteur d'onde et la fréquence caractéristique K_x du réseau en transmission qui leur donne naissance, avec :

$$\Delta = \frac{K_x(K_x - 2\gamma_x)}{4\beta_1}. \quad (\text{II.28})$$

Nous verrons plus loin que la condition $\Delta = 0$ est la *condition de Bragg* du réseau de diffraction en transmission et qu'elle joue un rôle essentiel dans l'efficacité de ce réseau.

Par ailleurs, chaque équation fait apparaître une variation de l'amplitude de l'enveloppe d'une onde « R » proportionnelle à celle de l'onde « S » qui se propage dans le même sens, relativement à l'axe (Oz), qu'elle. Le coefficient de proportionnalité peut alors être interprété comme un **coefficient de couplage co-directionnel**, et traduit un échange d'énergie, au cours de la propagation de la lumière dans l'H1D, entre ondes « R » et ondes « S » se propageant de concert (R^+ avec S^+ , R^- avec S^-). Suivant que l'échange d'énergie se fait au profit d'une onde « R » et au détriment de l'onde « S » de même sens de propagation, ou l'inverse, on voit apparaître deux tels coefficients de couplage, termes non-diagonaux de l'opérateur d'évolution :

$$\chi_s = k_0^2 \varepsilon_{1x} / 4\beta_1, \quad (\text{II.29a})$$

$$\tilde{\chi}_s = k_0^2 \tilde{\varepsilon}_{1x} / 4\beta_1. \quad (\text{II.29b})$$

Ces coefficients sont indicés « s » en référence à l'état de polarisation TE (ou s) que nous considérons ici. Nous verrons plus loin que leurs homologues, en polarisation TM (ou p) prennent des formes différentes. Naturellement, ces coefficients sont proportionnels aux amplitudes des parties réelle et imaginaire de la modulation de permittivité diélectrique à l'origine de la diffraction des ondes « R ». On constate immédiatement qu'en l'absence d'une telle modulation, donc en l'absence de réseau de diffraction dans le milieu, aucune onde « S » n'est créée au cours de la propagation.

On note que les quatre coefficients caractéristiques de l'évolution des enveloppes R^+ , R^- , S^+ et S^- sont chacun fonction de la pulsation ω de l'onde incidente et de son angle d'incidence via k_0 , β_1 et éventuellement γ_x .

Dès lors, le système de quatre équations d'évolution spatiale des enveloppes des ondes en présence peut être réécrit de manière compacte de la manière suivante :

$$i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} R^+ \\ R^- \\ S^+ \\ S^- \end{pmatrix} = [K_s] \begin{pmatrix} R^+ \\ R^- \\ S^+ \\ S^- \end{pmatrix}, \quad (\text{II.30})$$

où $[K_s]$ est l'opérateur d'évolution du système en polarisation TE (s), matrice (4×4)) s'exprimant en fonctions des seuls paramètres couploniques :

$$[K_s] = \begin{pmatrix} i\alpha & 0 & \chi_s & 0 \\ 0 & -i\alpha & 0 & -\chi_s \\ \tilde{\chi}_s & 0 & i\alpha - 2\Delta & 0 \\ 0 & -\tilde{\chi}_s & 0 & -(i\alpha - 2\Delta) \end{pmatrix}. \quad (\text{II.31})$$

Afin de le symétriser quelque peu, on peut procéder à un déphasage judicieux des enveloppes lentement variables des champs électriques, selon:

$$R^+(z) = A(z) \exp(i \Delta z), \quad (\text{II.32a})$$

$$R^-(z) = B(z) \exp(-i \Delta z), \quad (\text{II.32b})$$

$$S^+(z) = C(z) \exp(i \Delta z), \quad (\text{II.32c})$$

$$S^-(z) = D(z) \exp(-i \Delta z). \quad (\text{II.32d})$$

Le système d'équations d'évolution portant sur les enveloppes déphasées A , B , C et D s'écrit alors à l'aide d'un opérateur symétrisé $[K]$:

$$i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = [K] \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (i\alpha + \Delta) & 0 & \chi_s & 0 \\ 0 & -(i\alpha + \Delta) & 0 & -\chi_s \\ \tilde{\chi}_s & 0 & (i\alpha - \Delta) & 0 \\ 0 & -\tilde{\chi}_s & 0 & -(i\alpha - \Delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}. \quad (\text{II.33})$$

Afin de parfaire l'écriture, nous introduisons les coefficients Δ_1 et Δ_2 définis par :

$$\Delta_1 = i\alpha + \Delta, \quad (\text{II.34a})$$

$$\Delta_2 = i\alpha - \Delta = -\Delta_1^*, \quad (\text{II.34b})$$

ce qui permet de réécrire le système d'équations d'évolution selon :

$$i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = [K] \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 & \chi_s & 0 \\ 0 & -\Delta_1 & 0 & -\chi_s \\ \tilde{\chi}_s & 0 & \Delta_2 & 0 \\ 0 & -\tilde{\chi}_s & 0 & -\Delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}. \quad (\text{II.35})$$

Sous cette forme, il apparaît aisément que ce système peut être séparé en deux sous-systèmes portant respectivement sur les enveloppes réduites A et C des champs $\vec{E}_{R_1}^+$ et $\vec{E}_{S_1}^+$, d'une part, et sur les enveloppes B et D des champs $\vec{E}_{R_1}^-$ et $\vec{E}_{S_1}^-$ d'autre part :

$$i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1 & \chi_s \\ \tilde{\chi}_s & \Delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}, \quad (\text{II.36a})$$

et

$$i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta_1 & -\chi_s \\ -\tilde{\chi}_s & -\Delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}. \quad (\text{II.36b})$$

Ce découplage du problème en deux sous-problèmes indépendants — l'un portant sur les deux ondes se propageant dans le sens positif de l'axe (Oz), l'autre sur celles se propageant dans le sens négatif de cet axe — est naturel, l'H1D ne donnant lieu à échange d'énergie qu'entre ondes co-directionnelles.

La résolution de ces deux systèmes d'équations différentielles couplées ne présente pas de difficulté majeure, comme nous le verrons plus loin. Elle nécessite néanmoins de fixer les conditions aux limites du problème. En l'occurrence, nous considérons ici une unique onde entrante, l'onde incidente pénétrant dans l'H1D à l'abscisse $z = 0$. Elle donne naissance de manière localisée (aux interfaces) à une onde réfléchie, et ces deux ondes donnent naissance de manière distribuée (dans toute l'épaisseur de l'H1D) aux ondes diffractée et rétrodiffractée. Les conditions aux limites qui nous seront nécessaires sont alors, en termes d'amplitudes normalisées :

$$\begin{aligned} R^+(z=0) &= 1 \\ S^+(z=0) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.37})$$

III.1.2. CAS DE LA POLARISATION INCIDENTE TM

En polarisation TM, les champs électriques des ondes en présence dans l'H1D sont coplanaires avec le gradient de permittivité et appartiennent donc tous au plan (xOz). La figure II.4 ci-dessous illustre la géométrie du problème.

Le principe des calculs est évidemment identique à celui exposé précédemment dans le cas d'une polarisation incidente TE. On s'intéresse à nouveau à des solutions de l'équation de propagation qui prennent la forme générique (II.7), soit ici :

$$\vec{E}_{R_1}^+(\vec{r}, t) = R^+(z) \exp \left[i(\omega t - \vec{k}_{R_1}^+ \cdot \vec{r}) \right] \vec{e}_{R_1}^+, \quad (\text{II.38a})$$

$$\vec{E}_{R_1}^-(\vec{r}, t) = R^-(z) \exp \left[i(\omega t - \vec{k}_{R_1}^- \cdot \vec{r}) \right] \vec{e}_{R_1}^-, \quad (\text{II.38b})$$

$$\vec{E}_{S_1}^+(\vec{r}, t) = S^+(z) \exp \left[i(\omega t - \vec{k}_{S_1}^+ \cdot \vec{r}) \right] \vec{e}_{S_1}^+, \quad (\text{II.38c})$$

$$\vec{E}_{S_1}^-(\vec{r}, t) = S^-(z) \exp\left[i(\omega t - \vec{k}_{S_1}^- \cdot \vec{r})\right] \vec{e}_{S_1}^-, \quad (\text{II.38d})$$

où R^+ , R^- , S^+ et S^- sont à nouveau les amplitudes lentement variables des ondes réfractée, réfléchie, diffractée et rétrodiffractée présentes dans l'H1D.

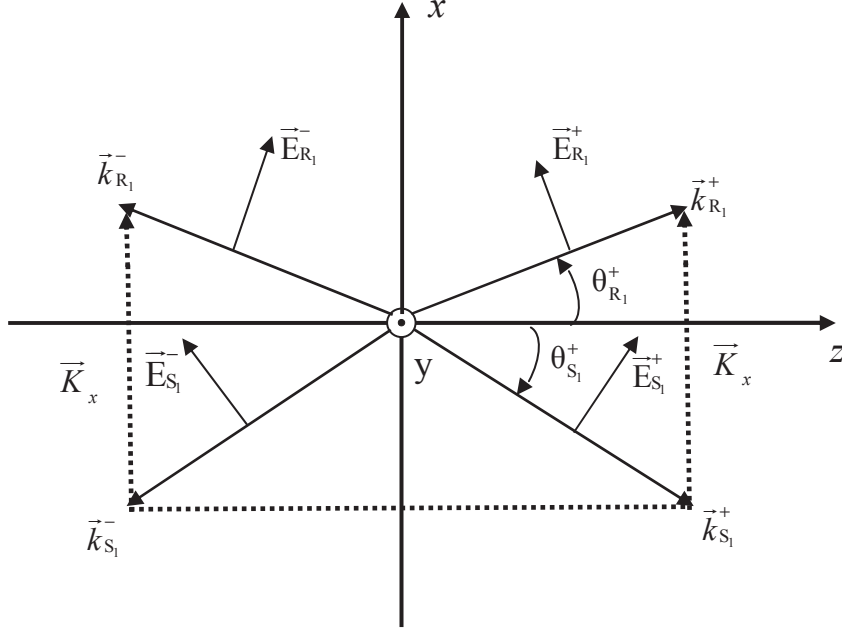


Fig. II.4 : Géométrie des ondes en présence dans l'H1D en polarisation TM

Ici, à la différence du cas TE, les quatre champs ne sont pas colinéaires, et leurs directions dépendent de l'angle d'incidence de l'onde introduite en $z = 0$ dans l'H1D. En fonction des angles algébriques $\theta_{R_1}^+$ et $\theta_{S_1}^+$ définis sur la Figure II.4, les composantes de leurs vecteurs directeurs unitaires s'écrivent :

$$\vec{e}_{R_1}^+ = \begin{pmatrix} \cos \theta_{R_1}^+ \\ 0 \\ -\sin \theta_{R_1}^+ \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_{R_1}^- = \begin{pmatrix} \cos \theta_{R_1}^+ \\ 0 \\ \sin \theta_{R_1}^+ \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_{S_1}^+ = \begin{pmatrix} \cos \theta_{S_1}^+ \\ 0 \\ -\sin \theta_{S_1}^+ \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_{S_1}^- = \begin{pmatrix} \cos \theta_{S_1}^+ \\ 0 \\ \sin \theta_{S_1}^+ \end{pmatrix}. \quad (\text{II.39})$$

Le champ électrique qui doit vérifier l'équation de propagation dans l'H1D est le champ électrique total, et s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{E}_T(\vec{r}, t) &= \vec{E}_{R_1}^+(\vec{r}, t) + \vec{E}_{R_1}^-(\vec{r}, t) + \vec{E}_{S_1}^+(\vec{r}, t) + \vec{E}_{S_1}^-(\vec{r}, t) \\ &= \left[R^+(z) e^{-i\vec{k}_{R_1}^+ \cdot \vec{r}} \vec{e}_{R_1}^+ + R^-(z) e^{-i\vec{k}_{R_1}^- \cdot \vec{r}} \vec{e}_{R_1}^- + S^+(z) e^{-i\vec{k}_{S_1}^+ \cdot \vec{r}} \vec{e}_{S_1}^+ + S^-(z) e^{-i\vec{k}_{S_1}^- \cdot \vec{r}} \vec{e}_{S_1}^- \right] e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

En polarisation TM, néanmoins, l'équation de propagation ne se ramène plus à une équation scalaire de Helmholtz, mais demeure vectorielle et fait intervenir les variations spatiales de permittivité diélectrique, avec :

$$\vec{\Delta} \vec{E}_T - \vec{\text{grad}} \left[\text{div} \vec{E}_T \right] - \frac{1}{c^2} \varepsilon_r(x) \frac{\partial^2 \vec{E}_T}{\partial t^2} = \vec{0}, \quad (\text{II.41})$$

soit encore, pour des ondes harmoniques :

$$\vec{\Delta} \vec{E}_T - \vec{\text{grad}} \left[\text{div} \vec{E}_T \right] + k_0^2 \varepsilon_r(x) \vec{E}_T = \vec{0}. \quad (\text{II.42})$$

Il nous faut dès lors expliciter dans cette équation le terme $-\vec{\text{grad}} \left[\text{div} \vec{E}_T \right]$. Chacun des quatre champs qui composent l'onde électromagnétique totale présente dans l'H1D est de la forme :

$$\vec{E} = F(z) \exp \left[i \left(\omega t - \vec{k}_F \cdot \vec{r} \right) \right] \vec{e}_F, \quad (\text{II.43})$$

où aussi bien \vec{k}_F que \vec{e}_F appartiennent au plan (xOz) et, à cause du caractère transverse des champs, vérifient $\vec{k}_F \cdot \vec{e}_F = 0$. On peut donc écrire, E_y étant nul en polarisation TM :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\vec{e}_F \cdot \vec{e}_x \right) F(z) \exp \left[i \left(\omega t - \vec{k}_F \cdot \vec{r} \right) \right] \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\vec{e}_F \cdot \vec{e}_z \right) F(z) \exp \left[i \left(\omega t - \vec{k}_F \cdot \vec{r} \right) \right] \right], \quad (\text{II.44})$$

ce qui, après développement, donne :

$$\text{div} \vec{E} = \left[\left(-ik_{F_x} \left(\vec{e}_F \cdot \vec{e}_x \right) - ik_{F_z} \left(\vec{e}_F \cdot \vec{e}_z \right) \right) F(z) + \frac{\partial F(z)}{\partial z} \left(\vec{e}_F \cdot \vec{e}_z \right) \right] \exp \left[i \left(\omega t - \vec{k}_F \cdot \vec{r} \right) \right], \quad (\text{II.45})$$

où le terme $-ik_{F_x} \left(\vec{e}_F \cdot \vec{e}_x \right) - ik_{F_z} \left(\vec{e}_F \cdot \vec{e}_z \right)$ n'est autre que $-i \left(\vec{k}_F \cdot \vec{e}_F \right) = 0$, et donc :

$$\text{div} \vec{E} = \left[\frac{\partial F(z)}{\partial z} \left(\vec{e}_F \cdot \vec{e}_z \right) \right] \exp \left[i \left(\omega t - \vec{k}_F \cdot \vec{r} \right) \right]. \quad (\text{II.46})$$

Dès lors, le terme $-\vec{\text{grad}} \left[\text{div} \vec{E} \right]$ s'écrit :

$$\begin{aligned} -\vec{\text{grad}} \left[\text{div} \vec{E} \right] &= -\frac{\partial \left(\text{div} \vec{E} \right)}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial \left(\text{div} \vec{E} \right)}{\partial z} \vec{e}_z \\ &= \left\{ i \left[\frac{\partial F(z)}{\partial z} \left(\vec{e}_F \cdot \vec{e}_z \right) \right] \vec{k}_F - \left[\frac{\partial^2 F(z)}{\partial z^2} \left(\vec{e}_F \cdot \vec{e}_z \right) \right] \vec{e}_z \right\} \exp \left[i \left(\omega t - \vec{k}_F \cdot \vec{r} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.47})$$

Dans le cadre de l'approximation des enveloppes lentement variables, on néglige la dérivée seconde de $F(z)$ et on obtient donc :

$$-\vec{\text{grad}} \left[\text{div} \vec{E} \right] = i \left[\frac{\partial F(z)}{\partial z} \left(\vec{e}_F \cdot \vec{e}_z \right) \right] \exp \left[i \left(\omega t - \vec{k}_F \cdot \vec{r} \right) \right] \vec{k}_F. \quad (\text{II.48})$$

Le Laplacien vectoriel $\vec{\Delta} \vec{E}$, lui, s'écrit :

$$\bar{\Delta} \vec{E} = \left[\frac{\partial^2 F(z)}{\partial z^2} - i(\vec{k}_F \cdot \vec{e}_z) \frac{\partial F(z)}{\partial z} - \|\vec{k}_F\|^2 F(z) \right] \exp \left[i(\omega t - \vec{k}_F \cdot \vec{r}) \right] \vec{e}_F. \quad (\text{II.49})$$

En appliquant ces expressions à chacun des quatre champs présents dans la structure, et en reportant celle de la permittivité diélectrique relative modulée dans l'équation de propagation, on obtient, après avoir négligé les dérivées du second ordre, une équation différentielle du premier ordre — tout comme pour une polarisation TE, bien entendu, à ceci près qu'elle est vectorielle. Après avoir introduit dans cette équation les composantes des vecteurs d'ondes en présence et rappelé que $-(\gamma_x^2 + \beta_1^2) + k_0^2 \epsilon_m' = 0$, on peut à nouveau regrouper et identifier les termes de mêmes fréquences spatiales, et obtenir enfin un système *vectoriel* de quatre équations différentielles linéaires du premier ordre couplées :

$$\left[-2i\beta_1 \frac{dR^+(z)}{dz} \vec{e}_{R_1}^+ + i k_0^2 \epsilon_m'' R^+(z) \vec{e}_{R_1}^+ + i \vec{k}_{R_1}^+ \left[(\vec{e}_{R_1}^+ \cdot \vec{e}_z) \frac{dR^+(z)}{dz} \right] + k_0^2 \left(\frac{\epsilon_{1x}}{2} S^+(z) \vec{e}_{S_1}^+ \right) \right] \times \exp[-i(\gamma_x x + \beta_1 z)] = \vec{0} \quad (\text{II.50a})$$

$$\left[2i\beta_1 \frac{dR^-(z)}{dz} \vec{e}_{R_1}^- + i k_0^2 \epsilon_m'' R^-(z) \vec{e}_{R_1}^- + i \vec{k}_{R_1}^- \left[(\vec{e}_{R_1}^- \cdot \vec{e}_z) \frac{dR^-(z)}{dz} \right] + k_0^2 \left(\frac{\epsilon_{1x}}{2} S^-(z) \vec{e}_{S_1}^- \right) \right] \times \exp[-i(\gamma_x x - \beta_1 z)] = \vec{0} \quad (\text{II.50b})$$

$$\left[-2i\beta_1 \frac{dS^+(z)}{dz} \vec{e}_{S_1}^+ + \{-K_x(K_x - 2\gamma_x) + i k_0^2 \epsilon_m''\} S^+(z) \vec{e}_{S_1}^+ + i \vec{k}_{S_1}^+ \left[(\vec{e}_{S_1}^+ \cdot \vec{e}_z) \frac{dS^+(z)}{dz} \right] + k_0^2 \left(\frac{\tilde{\epsilon}_{1x}}{2} R^+(z) \vec{e}_{R_1}^+ \right) \right] \times \exp[-i((\gamma_x - K_x) + \beta_1 z)] = \vec{0} \quad (\text{II.50c})$$

$$\left[2i\beta_1 \frac{dS^-(z)}{dz} \vec{e}_{S_1}^- + \{-K_x(K_x - 2\gamma_x) + i k_0^2 \epsilon_m''\} S^-(z) \vec{e}_{S_1}^- + i \vec{k}_{S_1}^- \left[(\vec{e}_{S_1}^- \cdot \vec{e}_z) \frac{dS^-(z)}{dz} \right] + k_0^2 \left(\frac{\tilde{\epsilon}_{1x}}{2} R^-(z) \vec{e}_{R_1}^- \right) \right] \times \exp[-i((\gamma_x - K_x) x - \beta_1 z)] = \vec{0} \quad (\text{II.50d})$$

Les 4 équations vectorielles qui précèdent peuvent *a priori* se décomposer en 8 équations scalaires par projection sur les axes (Ox) et (Oz), mais 4 équations scalaires suffisent à l'obtention de l'opérateur d'évolution des enveloppes des champs, et il est judicieux de projeter les équations vectorielles (II.50a)-(II.50d) sur les directions des vecteurs unitaires $\vec{e}_{R_1}^+$, $\vec{e}_{R_1}^-$, $\vec{e}_{S_1}^+$ et $\vec{e}_{S_1}^-$, respectivement.

En rappelant que, pour ces ondes transverses, $\vec{k}_F \cdot \vec{e}_F = 0$, on obtient alors :

$$\left[-2i\beta_1 \frac{dR^+(z)}{dz} + i k_0^2 \epsilon_m'' R^+(z) + k_0^2 \left(\frac{\epsilon_{1x}}{2} S^+(z) (\vec{e}_{R_1}^+ \cdot \vec{e}_{S_1}^+) \right) \right] \exp[-i(\gamma_x x + \beta_1 z)] = 0, \quad (\text{II.51a})$$

$$\left[2i\beta_1 \frac{dR^-(z)}{dz} + ik_0^2 \varepsilon_m'' R^-(z) + k_0^2 \left(\frac{\varepsilon_{lx}}{2} S^-(z) (\vec{e}_{R_1}^- \cdot \vec{e}_{S_1}^-) \right) \right] \exp[-i(\gamma_x x - \beta_1 z)] = 0, \quad (\text{II.51b})$$

$$\left[-2i\beta_1 \frac{dS^+(z)}{dz} + \{-K_x(K_x - 2\gamma_x) + ik_0^2 \varepsilon_m''\} S^+(z) + k_0^2 \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{lx}}{2} R^+(z) (\vec{e}_{S_1}^+ \cdot \vec{e}_{R_1}^+) \right) \right] \times \exp[-i((\gamma_x - K_x)x + \beta_1 z)] = 0 \quad (\text{II.51c})$$

$$\left[2i\beta_1 \frac{dS^-(z)}{dz} + \{-K_x(K_x - 2\gamma_x) + ik_0^2 \varepsilon_m''\} S^-(z) + k_0^2 \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{lx}}{2} R^-(z) (\vec{e}_{S_1}^- \cdot \vec{e}_{R_1}^-) \right) \right] \times \exp[-i((\gamma_x - K_x)x - \beta_1 z)] = 0 \quad (\text{II.51d})$$

Comme en polarisation TE, ce système de quatre équations d'évolution spatiale couplées peut être exprimé, en polarisation TM (p) sous forme matricielle :

$$i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} R^+ \\ R^- \\ S^+ \\ S^- \end{pmatrix} = [K_p] \begin{pmatrix} R^+ \\ R^- \\ S^+ \\ S^- \end{pmatrix}, \quad (\text{II.52})$$

où l'opérateur d'évolution $[K_p]$ s'écrit :

$$[K_p] = \frac{1}{2\beta_1} \begin{pmatrix} ik_0^2 \varepsilon_m'' & 0 & k_0^2 \frac{\varepsilon_{lx}}{2} (\vec{e}_{R_1}^+ \cdot \vec{e}_{S_1}^+) & 0 \\ 0 & -ik_0^2 \varepsilon_m'' & 0 & -k_0^2 \frac{\varepsilon_{lx}}{2} (\vec{e}_{R_1}^- \cdot \vec{e}_{S_1}^-) \\ k_0^2 \frac{\tilde{\varepsilon}_{lx}}{2} (\vec{e}_{S_1}^+ \cdot \vec{e}_{R_1}^+) & 0 & -K_x(K_x - 2\gamma_x) + ik_0^2 \varepsilon_m'' & 0 \\ 0 & -k_0^2 \frac{\tilde{\varepsilon}_{lx}}{2} (\vec{e}_{S_1}^- \cdot \vec{e}_{R_1}^-) & 0 & -(-K_x(K_x - 2\gamma_x) + ik_0^2 \varepsilon_m'') \end{pmatrix} \quad (\text{II.53})$$

On constate que cet opérateur d'évolution est similaire à celui obtenu [voir Eq. (II.26)] en polarisation TE, à une modification près des termes non-diagonaux, qui traduisent le couplage entre ondes « R » et « S » de même sens de propagation. En polarisation TM, ces termes sont affectés par des facteurs angulaires traduisant le plus ou moins bon recouvrement des champs électriques (non colinéaires, à la différence de leurs homologues en polarisation TE) des ondes qui échangent leur énergie. Ces facteurs angulaires peuvent s'exprimer en fonction des angles d'inclinaison des vecteurs d'ondes en présence (*cf.* Fig. II.4) :

$$\vec{e}_{R_1}^+ \cdot \vec{e}_{S_1}^+ = \vec{e}_{S_1}^+ \cdot \vec{e}_{R_1}^+ = \vec{e}_{R_1}^- \cdot \vec{e}_{S_1}^- = \vec{e}_{S_1}^- \cdot \vec{e}_{R_1}^- = \cos(|\theta_{R_1}^+| + |\theta_{S_1}^+|). \quad (\text{II.54})$$

Les autres termes de l'opérateur d'évolution en polarisation TM sont identiques à ceux identifiés en polarisation TE. On retrouve ainsi le coefficient d'absorption (ou de gain) α , le coefficient de désaccord de phase co-directionnel Δ et les coefficients de couplage co-directionnels χ_s et $\tilde{\chi}_s$, respectivement définis par :

$$\alpha = \frac{k_0^2 \varepsilon_m''}{2\beta_1}, \quad \Delta = \frac{K_x(K_x - 2\gamma_x)}{4\beta_1}, \quad \chi_s = k_0^2 \varepsilon_{1x} / 4\beta_1, \quad \tilde{\chi}_s = k_0^2 \tilde{\varepsilon}_{1x} / 4\beta_1, \quad (\text{II.55})$$

et l'opérateur d'évolution s'écrit alors de manière compacte sous la forme :

$$[K_p] = \begin{pmatrix} i\alpha & 0 & \chi_s \cos(|\theta_{R_1}^+| + |\theta_{S_1}^+|) & 0 \\ 0 & -i\alpha & 0 & -\chi_s \cos(|\theta_{R_1}^+| + |\theta_{S_1}^+|) \\ \tilde{\chi}_s \cos(|\theta_{R_1}^+| + |\theta_{S_1}^+|) & 0 & i\alpha - 2\Delta & 0 \\ 0 & -\tilde{\chi}_s \cos(|\theta_{R_1}^+| + |\theta_{S_1}^+|) & 0 & -(i\alpha - 2\Delta) \end{pmatrix}. \quad (\text{II.56})$$

On peut encore définir des coefficients de couplage co-directionnels en polarisation TM (ou p), notés χ_p et $\tilde{\chi}_p$, selon :

$$\chi_p = \chi_s \cos(|\theta_{R_1}^+| + |\theta_{S_1}^+|) = \frac{k_0^2 \varepsilon_{1x}}{4\beta_1} \cos(|\theta_{R_1}^+| + |\theta_{S_1}^+|), \quad (\text{II.57a})$$

$$\tilde{\chi}_p = \tilde{\chi}_s \cos(|\theta_{R_1}^+| + |\theta_{S_1}^+|) = \frac{k_0^2 \tilde{\varepsilon}_{1x}}{4\beta_1} \cos(|\theta_{R_1}^+| + |\theta_{S_1}^+|), \quad (\text{II.57b})$$

et reformuler l'opérateur d'évolution TM sous une forme identique (aux valeurs des coefficients de couplage près) à son homologue TE :

$$[K_p] = \begin{pmatrix} i\alpha & 0 & \chi_p & 0 \\ 0 & -i\alpha & 0 & -\chi_p \\ \tilde{\chi}_p & 0 & i\alpha - 2\Delta & 0 \\ 0 & -\tilde{\chi}_p & 0 & -(i\alpha - 2\Delta) \end{pmatrix}. \quad (\text{II.58})$$

Le processus de symétrisation de cet opérateur est ensuite identique à celui employé dans le cas d'une polarisation TE, avec l'introduction d'enveloppes lentement variables déphasées A , B , C et D [voir Eqs. (II.32a)-(II.32d)] et de coefficients de déphasage mixtes $\Delta_1 = i\alpha + \Delta$ et $\Delta_2 = i\alpha - \Delta = -\Delta_1^*$ incluant le terme de pertes (ou de gain). On aboutit finalement à l'opérateur :

$$[K] = \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 & \chi_p & 0 \\ 0 & -\Delta_1 & 0 & -\chi_p \\ \tilde{\chi}_p & 0 & \Delta_2 & 0 \\ 0 & -\tilde{\chi}_p & 0 & -\Delta_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{II.59})$$

qui, à nouveau, montre que le problème est séparable en deux sous-problèmes portant sur les enveloppes réduites des champs co-propagatifs : celles, A et C , des champs $\vec{E}_{R_1}^+$ et $\vec{E}_{S_1}^+$, d'une part, et celles, B et D , des champs $\vec{E}_{R_1}^-$ et $\vec{E}_{S_1}^-$ d'autre part. Dans chaque cas, nous l'avons vu, il s'agit de l'interaction, au sein de l'H1D, entre ondes qui échangent effectivement de l'énergie :

$$i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1 & \chi_p \\ \tilde{\chi}_p & \Delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}, \quad (\text{II.60a})$$

et

$$i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta_1 & -\chi_p \\ -\tilde{\chi}_p & -\Delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}. \quad (\text{II.60b})$$

Les conditions aux limites nécessaires à la résolution de ces systèmes d'équations différentielles couplées est identique à celle introduite dans le cas d'une polarisation incidente TE :

$$\begin{aligned} R^+(z=0) &= 1 \\ S^+(z=0) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.61})$$

III.2. MATRICE DE TRANSFERT DE L'HOLOGRAMME 1D

L'établissement de la matrice de transfert de la structure permet de lier les valeurs des champs en deux abscisses z différente — tout particulièrement entre leurs valeurs en entrée (en $z = 0$) et en sortie (en $z = L$). Elle rend compte des déphasages dûs à la propagation des ondes et des échanges d'énergie co-directionnels dûs à la présence du réseau de diffraction en transmission.

Cette matrice s'obtient par résolution du système d'équations différentielles couplées caractérisé par l'opérateur d'évolution de la structure. Pour chacun des états fondamentaux de polarisation, TE (ou s) et TM (ou p), nous avons montré que ce système de 4 équations, portant sur les enveloppes déphasées $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$ et $D(z)$, se décompose en deux sous-systèmes de 2 équations de forme identique :

$$i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1 & \chi \\ \tilde{\chi} & \Delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \text{ et } i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta_1 & -\chi \\ -\tilde{\chi} & -\Delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}, \quad (\text{II.62})$$

où les termes diagonaux sont communs aux deux états de polarisation, tandis que les termes non diagonaux de couplage entre ondes co-propagatives ont des expressions $(\chi_s, \tilde{\chi}_s)$ et $(\chi_p, \tilde{\chi}_p)$ légèrement différentes selon le cas.

Ce type de systèmes d'équations différentielles couplées est récurrent dans de nombreux domaines de la Physique (oscillateurs couplés en mécanique, système à deux niveaux en physique quantique,...) et nous reprenons ici les techniques classiques de résolution que nous propose la littérature.

En l'occurrence, il s'agit de modifier, par un nouveau changement de variable « judicieux », la forme de l'opérateur d'évolution afin que par dérivation de cet opérateur, on arrive à deux équations différentielles du second ordre d'un type bien connu, celui de l'oscillateur harmonique, dont les solutions sont familières.

Introduisons la demi-somme et la demi-différence des termes diagonaux Δ_1 et Δ_2 :

$$\tau = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} = i\alpha = i \operatorname{Im}[\Delta_1], \quad \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} = \Delta = \operatorname{Re}[\Delta_1], \quad (\text{II.63})$$

et réécrivons les deux sous-systèmes d'équations en fonction de Δ et τ :

$$i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau + \Delta & \chi \\ \tilde{\chi} & \tau - \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}, \quad (\text{II.64a})$$

$$i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\tau + \Delta) & -\chi \\ -\tilde{\chi} & -(\tau - \Delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}. \quad (\text{II.64b})$$

L'étape suivante consiste à déphaser à nouveau les enveloppes lentement variables de la manière suivante :

$$A_1(z) = A(z) \exp(i\tau z) = A(z) \exp(-\alpha z), \quad (\text{II.65a})$$

$$B_1(z) = B(z) \exp(-i\tau z) = B(z) \exp(\alpha z), \quad (\text{II.65b})$$

$$C_1(z) = C(z) \exp(i\tau z) = C(z) \exp(-\alpha z), \quad (\text{II.65c})$$

$$D_1(z) = D(z) \exp(-i\tau z) = D(z) \exp(\alpha z), \quad (\text{II.65d})$$

de telle sorte que les équations d'évolution portant sur ces enveloppes modifiées prennent la forme :

$$i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} A_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & \chi \\ \tilde{\chi} & -\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ C_1 \end{pmatrix}, \quad (\text{II.66a})$$

$$i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} B_1 \\ D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta & -\chi \\ -\tilde{\chi} & \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ D_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.66b})$$

Une nouvelle dérivation de ces expressions mène alors à un système d'équations différentielles du second ordre *découplées*, selon :

$$-\frac{d^2}{dz^2} \begin{pmatrix} A_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta^2 + \chi\tilde{\chi} & 0 \\ 0 & \Delta^2 + \chi\tilde{\chi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ C_1 \end{pmatrix}, \quad (\text{II.67a})$$

$$-\frac{d^2}{dz^2} \begin{pmatrix} B_1 \\ D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta^2 + \chi\tilde{\chi} & 0 \\ 0 & \Delta^2 + \chi\tilde{\chi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ D_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.67b})$$

À ce stade, il est utile, pour condenser les écritures, d'introduire un coefficient « couplonique » mixte, que nous noterons simplement Γ dans ce paragraphe, et qui, selon l'état de polarisation incident, prend les valeurs suivantes :

$$\Gamma_{s,p} = \sqrt{\chi_{s,p} \tilde{\chi}_{s,p} + \Delta^2}, \quad (\text{II.68})$$

et n'est donc autre que le carré du terme diagonal des équations (II-67). Ce coefficient englobe le désaccord des vecteurs d'ondes en présence vis-à-vis de la périodicité du réseau de diffraction (*via* Δ), les éventuels pertes ou gain du milieu holographique (également *via* Δ), et les coefficients de couplage χ et $\tilde{\chi}$ entre ondes co-propagatives dans les sens positif et négatif de l'axe (Oz).

L'équation différentielle vérifiée par chacune des enveloppes réduites $A_1(z)$, $B_1(z)$, $C_1(z)$ et $D_1(z)$ est donc bien de forme analogue à celle, générique, de l'oscillateur harmonique (ici, spatial) :

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \omega_0^2 f(z) = 0, \quad (\text{II.69})$$

où ω_0 est une pulsation (dans notre cas, il s'agit d'une pulsation spatiale Γ) caractéristique du système oscillant. Ici, les variations spatiales des amplitudes des ondes en présence dans l'hologramme sont dues à l'échange perpétuel d'énergie entre ondes « R » et ondes diffractées « S » co-propagatives.

La forme générale des solutions de cette équation, combinaison linéaire de fonctions circulaires, nous permet de rechercher les enveloppes $A_1(z)$, $B_1(z)$, $C_1(z)$ et $D_1(z)$ selon :

$$A_1(z) = a_1 \cos(\Gamma z) + a_2 \sin(\Gamma z), \quad (\text{II.70a})$$

$$B_1(z) = b_1 \cos(\Gamma z) + b_2 \sin(\Gamma z), \quad (\text{II.70b})$$

$$C_1(z) = c_1 \cos(\Gamma z) + c_2 \sin(\Gamma z), \quad (\text{II.70c})$$

$$D_1(z) = d_1 \cos(\Gamma z) + d_2 \sin(\Gamma z). \quad (\text{II.70d})$$

À toute abscisse z , les amplitudes des fonctions enveloppes dépendent bien entendu des caractéristiques de la structure, mais aussi des conditions d'injection en $z = 0$. Il nous faut 8 équations indépendantes pour déterminer les valeurs des 8 coefficients $(a_i, b_i, c_i, d_i), i \in \{1, 2\}$. En supposant connues les valeurs de $A_1(0)$, $B_1(0)$, $C_1(0)$ et $D_1(0)$, les expressions (II.70) et leur report dans les équations d'évolution (II.66) mènent à :

$$a_1 = A_1(0) \quad a_2 = -i \frac{\Delta}{\Gamma} A_1(0) - i \frac{\chi}{\Gamma} C_1(0), \quad (\text{II.71a})$$

$$b_1 = B_1(0) \quad b_2 = i \frac{\Delta}{\Gamma} B_1(0) + i \frac{\chi}{\Gamma} D_1(0), \quad (\text{II.71b})$$

$$c_1 = C_1(0) \quad c_2 = i \frac{\Delta}{\Gamma} C_1(0) - i \frac{\tilde{\chi}}{\Gamma} A_1(0), \quad (\text{II.71c})$$

$$d_1 = D_1(0) \quad d_2 = i \frac{\tilde{\chi}}{\Gamma} B_1(0) - i \frac{\Delta}{\Gamma} D_1(0). \quad (\text{II.71d})$$

Dans le but d'établir la matrice de transfert de l'hologramme 1D, on peut dès lors reporter ces valeurs dans les équations (II.70) :

$$A_1(z) = A_1(0) \left[\cos(\Gamma z) - i \frac{\Delta}{\Gamma} \sin(\Gamma z) \right] - C_1(0) \left[i \frac{\chi}{\Gamma} \sin(\Gamma z) \right], \quad (\text{II.72a})$$

$$B_1(z) = B_1(0) \left[\cos(\Gamma z) + i \frac{\Delta}{\Gamma} \sin(\Gamma z) \right] + D_1(0) \left[i \frac{\chi}{\Gamma} \sin(\Gamma z) \right], \quad (\text{II.72b})$$

$$C_1(z) = C_1(0) \left[\cos(\Gamma z) + i \frac{\Delta}{\Gamma} \sin(\Gamma z) \right] - A_1(0) \left[i \frac{\tilde{\chi}}{\Gamma} \sin(\Gamma z) \right], \quad (\text{II.72c})$$

$$D_1(z) = D_1(0) \left[\cos(\Gamma z) - i \frac{\Delta}{\Gamma} \sin(\Gamma z) \right] + B_1(0) \left[i \frac{\tilde{\chi}}{\Gamma} \sin(\Gamma z) \right]. \quad (\text{II.72d})$$

La matrice de transfert relie, rappelons-le, les variations selon (Oz) des amplitudes $E_{R_1}^+$, $E_{R_1}^-$, $E_{S_1}^+$ et $E_{S_1}^-$ des champs physiques entre l'entrée (en $z = 0$) et la sortie (en $z = L$) de la structure. Pour l'obtenir, il nous faut donc réécrire les équations (II.72) en $z = L$, puis, *via* les relations (II.32) et (II.65), remonter aux valeurs respectives des enveloppes initiales $R^+(z)$, $R^-(z)$, $S^+(z)$ et $S^-(z)$ aux deux extrémités de l'hologramme 1D en passant par les enveloppes intermédiaires $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$ et $D(z)$.

On obtient ainsi successivement, pour les enveloppes $A_1(z)$, $B_1(z)$, $C_1(z)$ et $D_1(z)$ et par inversion des relations (II.72) :

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ C_1 \end{pmatrix}_{z=0} = \begin{pmatrix} \cos(\Gamma L) + i \frac{\Delta}{\Gamma} \sin(\Gamma L) & i \frac{\tilde{\chi}}{\Gamma} \sin(\Gamma L) \\ i \frac{\tilde{\chi}}{\Gamma} \sin(\Gamma L) & \cos(\Gamma L) - i \frac{\Delta}{\Gamma} \sin(\Gamma L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ C_1 \end{pmatrix}_{z=L}, \quad (\text{II.73a})$$

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ D_1 \end{pmatrix}_{z=0} = \begin{pmatrix} \cos(\Gamma L) - i \frac{\Delta}{\Gamma} \sin(\Gamma L) & -i \frac{\tilde{\chi}}{\Gamma} \sin(\Gamma L) \\ -i \frac{\tilde{\chi}}{\Gamma} \sin(\Gamma L) & \cos(\Gamma L) + i \frac{\Delta}{\Gamma} \sin(\Gamma L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ D_1 \end{pmatrix}_{z=L}, \quad (\text{II.73b})$$

puis, par passage aux enveloppes $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$ et $D(z)$:

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}_{z=0} = e^{-\alpha L} \begin{pmatrix} \cos(\Gamma L) + i \frac{\Delta}{\Gamma} \sin(\Gamma L) & i \frac{\tilde{\chi}}{\Gamma} \sin(\Gamma L) \\ i \frac{\tilde{\chi}}{\Gamma} \sin(\Gamma L) & \cos(\Gamma L) - i \frac{\Delta}{\Gamma} \sin(\Gamma L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}_{z=L}, \quad (\text{II.74a})$$

$$\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}_{z=0} = e^{\alpha L} \begin{pmatrix} \cos(\Gamma L) - i \frac{\Delta}{\Gamma} \sin(\Gamma L) & -i \frac{\tilde{\chi}}{\Gamma} \sin(\Gamma L) \\ -i \frac{\tilde{\chi}}{\Gamma} \sin(\Gamma L) & \cos(\Gamma L) + i \frac{\Delta}{\Gamma} \sin(\Gamma L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}_{z=L}, \quad (\text{II.74b})$$

puis encore, pour les fonctions enveloppes initiales $R^+(z)$, $R^-(z)$, $S^+(z)$ et $S^-(z)$:

$$\begin{pmatrix} R^+ \\ S^+ \end{pmatrix}_{z=0} = e^{-i\Delta L} e^{-\alpha L} \begin{pmatrix} \cos(\Gamma L) + i \frac{\Delta}{\Gamma} \sin(\Gamma L) & i \frac{\tilde{\chi}}{\Gamma} \sin(\Gamma L) \\ i \frac{\tilde{\chi}}{\Gamma} \sin(\Gamma L) & \cos(\Gamma L) - i \frac{\Delta}{\Gamma} \sin(\Gamma L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^+ \\ S^+ \end{pmatrix}_{z=L}, \quad (\text{II.75a})$$

$$\begin{pmatrix} R^- \\ S^- \end{pmatrix}_{z=0} = e^{i\Delta L} e^{\alpha L} \begin{pmatrix} \cos(\Gamma L) - i\frac{\Delta}{\Gamma} \sin(\Gamma L) & -i\frac{\chi}{\Gamma} \sin(\Gamma L) \\ -i\frac{\tilde{\chi}}{\Gamma} \sin(\Gamma L) & \cos(\Gamma L) + i\frac{\Delta}{\Gamma} \sin(\Gamma L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^- \\ S^- \end{pmatrix}_{z=L}, \quad (\text{II.75b})$$

et enfin, pour les amplitudes $E_{R_1}^+$, $E_{R_1}^-$, $E_{S_1}^+$ et $E_{S_1}^-$ des champs physiques :

$$\begin{pmatrix} E_{R_1}^+ \\ E_{S_1}^+ \end{pmatrix}_{z=0} = e^{i(\beta_1 - \Delta)L} e^{-\alpha L} \begin{pmatrix} \cos(\Gamma L) + i\frac{\Delta}{\Gamma} \sin(\Gamma L) & i\frac{\chi}{\Gamma} \sin(\Gamma L) \\ i\frac{\tilde{\chi}}{\Gamma} \sin(\Gamma L) & \cos(\Gamma L) - i\frac{\Delta}{\Gamma} \sin(\Gamma L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{R_1}^+ \\ E_{S_1}^+ \end{pmatrix}_{z=L}, \quad (\text{II.76a})$$

$$\begin{pmatrix} E_{R_1}^- \\ E_{S_1}^- \end{pmatrix}_{z=0} = e^{-i(\beta_1 - \Delta)L} e^{\alpha L} \begin{pmatrix} \cos(\Gamma L) - i\frac{\Delta}{\Gamma} \sin(\Gamma L) & -i\frac{\chi}{\Gamma} \sin(\Gamma L) \\ -i\frac{\tilde{\chi}}{\Gamma} \sin(\Gamma L) & \cos(\Gamma L) + i\frac{\Delta}{\Gamma} \sin(\Gamma L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{R_1}^- \\ E_{S_1}^- \end{pmatrix}_{z=L}. \quad (\text{II.76b})$$

Rappelons ici que, hormis la modulation perturbative de permittivité dans la direction (Ox), la structure est supposée invariante et de dimensions infinies dans les directions (Ox) et (Oy), et de dimension finie L dans la seule direction (Oz). Le calcul, dans la partie suivante de ce chapitre, de la réponse de l'H1D à une onde incidente ne dépend que des déphasages relatifs entre les ondes superposées qui interfèrent entre les abscisses $z = 0$ et $z = L$, déphasages gouvernés, du point de vue strictement propagatif, par la seule composante selon (Oz) des vecteurs d'onde, à savoir $\pm \beta_1$, comme on le voit dans les équations (II.76).

Ces équations permettent au bout du compte d'écrire la matrice de transfert (4×4) [H] de l'hologramme 1D, sous la forme et selon les conventions retenues dans ce document :

$$\begin{pmatrix} E_{R_1}^+ \\ E_{R_1}^- \\ E_{S_1}^+ \\ E_{S_1}^- \end{pmatrix}_{z=0} = [H] \begin{pmatrix} E_{R_1}^+ \\ E_{R_1}^- \\ E_{S_1}^+ \\ E_{S_1}^- \end{pmatrix}_{z=L}. \quad (\text{II.77})$$

Les éléments H_{ij} ($(i, j) \in \{1, 2, 3, 4\}^2$) de cette matrice s'écrivent en fonction de la constitution, de la structure, et de la géométrie de l'hologramme, ainsi que des conditions d'injection (fréquence, angle d'incidence) de l'injection — tous paramètres qui se retrouvent également dans l'expression des coefficients couploniques Δ , χ , $\tilde{\chi}$ et Γ :

$$H_{12} = H_{21} = H_{14} = H_{41} = H_{23} = H_{32} = H_{34} = H_{43} = 0, \quad (\text{II.78a})$$

$$H_{11} = \left[\cos(\Gamma L) + i\frac{\Delta}{\Gamma} \sin(\Gamma L) \right] e^{i(\beta_1 - \Delta)L} e^{-\alpha L}, \quad (\text{II.78b})$$

$$H_{13} = \left[i\frac{\chi}{\Gamma} \sin(\Gamma L) \right] e^{i(\beta_1 - \Delta)L} e^{-\alpha L}, \quad (\text{II.78c})$$

$$H_{22} = \left[\cos(\Gamma L) - i \frac{\Delta}{\Gamma} \sin(\Gamma L) \right] e^{-i(\beta_1 - \Delta)L} e^{\alpha L}, \quad (\text{II.78d})$$

$$H_{24} = \left[-i \frac{\chi}{\Gamma} \sin(\Gamma L) \right] e^{-i(\beta_1 - \Delta)L} e^{\alpha L}, \quad (\text{II.78e})$$

$$H_{31} = \left[i \frac{\tilde{\chi}}{\Gamma} \sin(\Gamma L) \right] e^{i(\beta_1 - \Delta)L} e^{-\alpha L}, \quad (\text{II.78f})$$

$$H_{33} = \left[\cos(\Gamma L) - i \frac{\Delta}{\Gamma} \sin(\Gamma L) \right] e^{i(\beta_1 - \Delta)L} e^{-\alpha L}, \quad (\text{II.78g})$$

$$H_{42} = \left[-i \frac{\tilde{\chi}}{\Gamma} \sin(\Gamma L) \right] e^{-i(\beta_1 - \Delta)L} e^{\alpha L}, \quad (\text{II.78h})$$

$$H_{44} = \left[\cos(\Gamma L) + i \frac{\Delta}{\Gamma} \sin(\Gamma L) \right] e^{-i(\beta_1 - \Delta)L} e^{\alpha L}. \quad (\text{II.78i})$$

Cette matrice de transfert est valide pour chacun des états fondamentaux de polarisation TE et TM, à condition d'adapter les expressions des seuls termes qui dépendent de la configuration de polarisation incidente retenue, à savoir les coefficients de couplage, χ et $\tilde{\chi}$, et le coefficient couplonique mixte Γ .

De la matrice de transfert ainsi établie, nous allons pouvoir déduire des coefficients de répartition énergétique, rapports d'intensité électromagnétique entre l'onde entrante et les quatre ondes sortantes (réfléchie, transmise, diffractée et rétrodiffractée par la structure). Pour ce faire, cependant, des réflexion et réfraction additionnelles doivent être prises en compte à chacune des deux interfaces séparant le milieu holographique des deux milieux homogènes qui l'entourent. La partie suivante de ce chapitre s'intéresse ainsi d'abord à l'établissement des coefficients de Fresnel correspondants pour les ondes « R » et « S », dans chaque cas fondamental de polarisation. Ces coefficients de Fresnel entrent dans la définition de matrices d'interface en $z = 0$ et en $z = L$, respectivement notées [A] et [B], et donc dans celle de la matrice de transfert [M] de l'hologramme 1D « habillé », simplement définie par (cf. Fig. II.1) :

$$\begin{pmatrix} E_{R_0}^+ \\ E_{R_0}^- \\ E_{S_0}^+ \\ E_{S_0}^- \end{pmatrix}_{z=0^-} = [M] \begin{pmatrix} E_{R_2}^+ \\ E_{R_2}^- \\ E_{S_2}^+ \\ E_{S_2}^- \end{pmatrix}_{z=L^+}, \quad (\text{II.79})$$

où

$$[M] = [A] [H] [B]. \quad (\text{II.80})$$

IV. COEFFICIENTS DE RÉPARTITION ET RÉPONSES DE L'H1D

IV.1. MATRICES D'INTERFACE

IV.1.1. FORME GÉNÉRIQUE DES MATRICES D'INTERFACE

Les matrices d'interfaces dont il est question ici sont des cas particuliers des matrices de transfert, qui relient les amplitudes des champs de part et d'autre des faces d'un miroir (au sens général du terme, que ce soit une lame épaisse diélectrique semi-réfléchissante, un miroir multicouches ou, comme ici, une simple interface entre milieux adjacents) qui délimite une des extrémités de la structure. Elles peuvent s'écrire en fonction de coefficients de réflexion et de transmission en amplitude (avec ou sans pertes) qu'il s'agit d'établir.

Notons que les éléments de ces matrices dépendent évidemment de la nature de l'interface, de l'état de polarisation des ondes, mais aussi, dans notre système, de la nature des ondes. En effet, nous l'avons vu, les ondes dites « R » et les ondes diffractées dites « S » n'interagissent, en échangeant de l'énergie, que de manière distribuée, dans l'épaisseur de l'H1D. En revanche, aux extrémités localisées de l'H1D, les ondes « R » ne donnent naissance, par réflexion ou réfraction, qu'à d'autres ondes « R », et il en est de même pour les ondes « S ». Dès lors, on peut commencer par établir la forme générale d'une matrice d'interface pour un système de 4 champs de même nature. L'intérêt d'adopter le formalisme et la structure des matrices de transfert pour la prise en compte des interfaces est bien entendu d'assurer la cascabilité, par simple multiplication, des matrices décrivant l'H1D et les extrémités qui le séparent des deux milieux homogènes qui l'entourent.

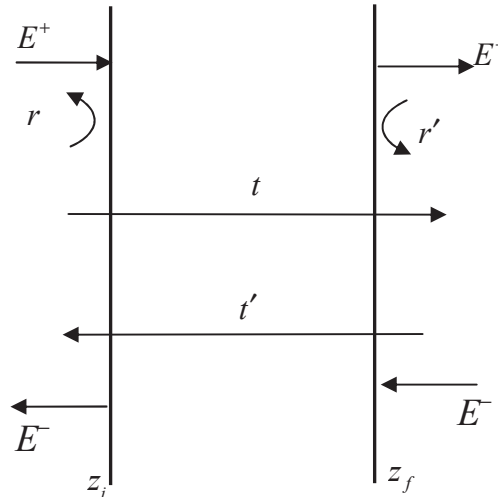


Fig. II.5 : Coefficients de réflexion (r, r') et de transmission (t, t') lors du passage à travers un miroir compris entre les abscisses z_i et z_f .

En notant z_i et z_f (avec $z_i < z_f$) les abscisses des faces d'un tel miroir (Fig. II.5), on peut établir les équations de répartition suivantes :

$$E^-(z_i) = r E^+(z_i) + t' E^-(z_f), \quad (\text{II.81a})$$

$$E^+(z_f) = t E^+(z_i) + r' E^-(z_f), \quad (\text{II.81b})$$

où les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude dans le sens des z croissants sont respectivement notés r et t , tandis que leurs homologues dans le sens des z décroissants sont notés r' et t' . La forme générale de la matrice d'interface (2×2) pour ces quatre champs s'obtient alors immédiatement :

$$\begin{pmatrix} E^+ \\ E^- \end{pmatrix}_{z=z_i} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & \frac{-r'}{t} \\ \frac{r}{t} & \frac{tt' - rr'}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^+ \\ E^- \end{pmatrix}_{z=z_f}. \quad (\text{II.82})$$

Dans notre cas, en reprenant les notations antérieures pour les enveloppes des ondes « R » et « S », on en déduit qu'une matrice de miroir aura la structure (4×4) diagonale par blocs suivante :

$$\begin{pmatrix} R^+ \\ R^- \\ S^+ \\ S^- \end{pmatrix}_{z=z_i} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t^R} & \frac{-r'^R}{t^R} & 0 & 0 \\ \frac{r^R}{t^R} & \frac{t^R t'^R - r^R r'^R}{t^R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{t^S} & \frac{-r'^S}{t^S} \\ 0 & 0 & \frac{r^S}{t^S} & \frac{t^S t'^S - r^S r'^S}{t^S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^+ \\ R^- \\ S^+ \\ S^- \end{pmatrix}_{z=z_f}, \quad (\text{II.83})$$

où les exposants 'R' et 'S' se réfèrent au type d'onde dont il est question.

Dans ce qui suit, nous allons établir la valeur des coefficients de réflexion et de transmission (ou réfraction) dans le cas le plus simple, celui d'une extrémité localisée séparant deux milieux diélectriques isotropes et non-magnétiques.

Pour de telles interfaces simples, où $z_i = z_f$, les coefficients r , r' , t et t' ne sont autres que des coefficients de Fresnel qui relient les amplitudes des champs immédiatement à gauche de l'interface à celles des champs immédiatement à sa droite. Nous déterminons leur expression générale, pour chacun des états fondamentaux de polarisation fondamentaux TE et TM et pour chacun des deux types de champs en présence dans l'H1D, les champs « R » issus de la réfraction et de la réflexion aux interfaces du champ incident, et les champs « S » nés de la diffraction de la lumière dans l'épaisseur de l'H1D. Nous serons alors en mesure d'établir les matrices d'interface [A], en $z = 0$, et [B], en $z = L$, pour chacune des surfaces séparant l'hologramme des milieux qui l'entourent.

Précisons que, dans l'approche perturbative qui est la nôtre, le calcul des coefficients de Fresnel supposera ici des interfaces entre deux milieux homogènes, d'indices n_0 et n_m de part et d'autre de l'interface A, et n_m et n_2 de part et d'autre de l'interface B.

Par ailleurs, il est important de comprendre que le calcul de ces coefficients pour les ondes « S » devra être entrepris avec précaution, ces ondes n'obéissant pas, dans l'épaisseur de l'H1D, à la même relation de dispersion que les ondes « R ».

IV.1.2. FORME GÉNÉRIQUE DES COEFFICIENTS DE FRESNEL

Les coefficients de Fresnel de réflexion et de transmission à une interface entre deux milieux résultent des relations de passage déduites des équations de Maxwell sous leur forme locale (ou encore par passage à la limite des théorèmes de Gauss et d'Ampère). Ces relations traduisent la continuité des composantes des champs \vec{D} et \vec{B} normales à l'interface, et la continuité des composantes des champs \vec{E} et \vec{H} parallèles (ou tangentiels) à cette interface.

Considérons, comme dans le reste de ce manuscrit, une interface parallèle au plan (xOy) d'un référentiel cartésien (Oxyz), séparant des milieux linéaires, homogènes et isotropes de permittivités absolues ϵ_i et ϵ_f et de perméabilités absolues μ_i et μ_f .

Dans la situation la plus générale, quatre ondes interagissent, comme dans le cas, par exemple, de structures multicouches. Dans le cas qui nous occupe, cependant, il n'y aura pas d'onde « S » incidente par la gauche de l'interface A, pas plus que d'ondes « R » ni « S » incidentes par la droite de l'interface B — mais cette réalité se retrouvera dans les conditions aux limites que nous adopterons et ne doit pas nous empêcher pas de considérer le cas général.

Il est pratique de traiter séparément les cas de polarisation TE (*s*) et TM (*p*), et de déterminer des expressions générales des coefficients de Fresnel dans ces deux cas, que nous adapterons ensuite aux ondes « R » et « S », et ce à chacune des deux interfaces, afin d'en déduire les éléments de matrice d'interface A_{ij} et B_{ij} pour chaque état fondamental de polarisation.

a) POLARISATION TE (*s*)

Quelle que soit leur nature « R » ou « S », les quatre ondes qui interagissent à l'interface (Fig. II.6) ont ici toutes des champs électriques \vec{E}_i^+ , \vec{E}_i^- , \vec{E}_f^+ et \vec{E}_f^- parallèles à (Oy), avec:

$$\vec{E}_i^+ = E_i^+ \vec{e}_y, \quad \vec{E}_i^- = E_i^- \vec{e}_y, \quad \vec{E}_f^+ = E_f^+ \vec{e}_y, \quad \vec{E}_f^- = E_f^- \vec{e}_y, \quad (\text{II.84a})$$

$$\vec{D}_i^+ = \epsilon_i E_i^+ \vec{e}_y, \quad \vec{D}_i^- = \epsilon_i E_i^- \vec{e}_y, \quad \vec{D}_f^+ = \epsilon_f E_f^+ \vec{e}_y, \quad \vec{D}_f^- = \epsilon_f E_f^- \vec{e}_y, \quad (\text{II.84b})$$

ainsi que des vecteurs d'ondes parallèles au plan (xOz) :

$$\vec{k}_i^+ = \begin{pmatrix} k_{ix} = k_i \sin \theta_i \\ 0 \\ k_{iz} = k_i \cos \theta_i \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_i^- = \begin{pmatrix} k_{ix} = k_i \sin \theta_i \\ 0 \\ -k_{iz} = -k_i \cos \theta_i \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_f^+ = \begin{pmatrix} k_{fx} = k_f \sin \theta_f \\ 0 \\ k_{fz} = k_f \cos \theta_f \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_f^- = \begin{pmatrix} k_{fx} = k_f \sin \theta_f \\ 0 \\ -k_{fz} = -k_f \cos \theta_f \end{pmatrix} \quad (\text{II.85})$$

où $k_i = \|\vec{k}_i^+\| = \|\vec{k}_i^-\|$ et $k_f = \|\vec{k}_f^+\| = \|\vec{k}_f^-\|$.

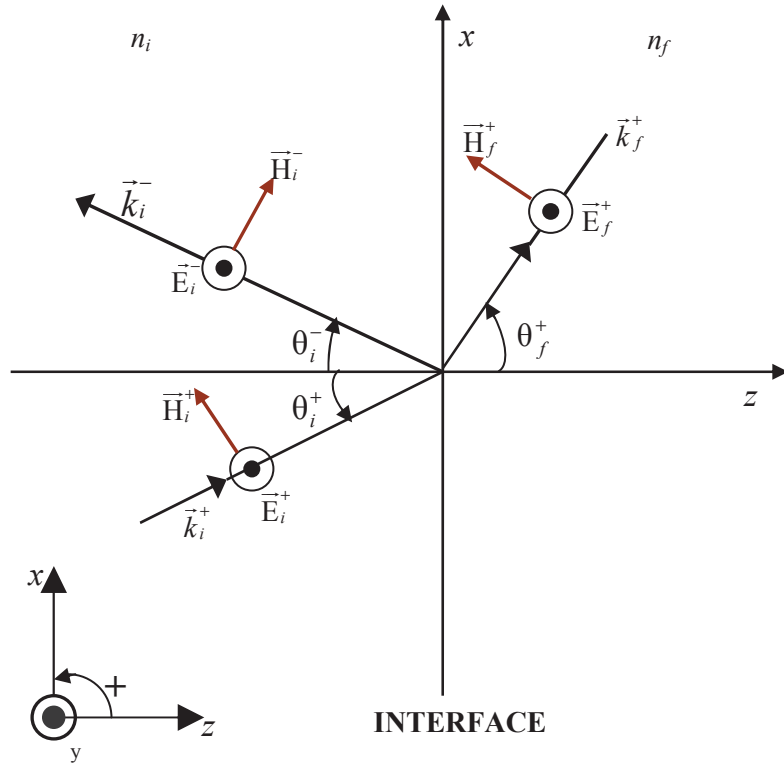


Fig. II.6 : Interface entre un milieu (i) d'indice de réfraction n_i et un milieu (f) d'indice de réfraction n_f . Les directions des vecteurs champs électriques et magnétiques sont représentées ici dans l'état de polarisation TE.

Dans le cadre de l'hypothèse des enveloppes lentement variables, pour chacun de ces champs, l'équation de Maxwell-Faraday $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ entraîne, en première approximation, $\omega \vec{B} = \vec{k} \wedge \vec{E}$, et il en découle les relations suivantes :

$$\omega \vec{B}_i^+ = \begin{pmatrix} -k_{iz} E_i^+ \\ 0 \\ k_{ix} E_i^+ \end{pmatrix}, \quad \omega \vec{B}_i^- = \begin{pmatrix} k_{iz} E_i^- \\ 0 \\ -k_{ix} E_i^- \end{pmatrix}, \quad \omega \vec{B}_f^+ = \begin{pmatrix} -k_{fz} E_f^+ \\ 0 \\ k_{fx} E_f^+ \end{pmatrix}, \quad \omega \vec{B}_f^- = \begin{pmatrix} k_{fz} E_f^- \\ 0 \\ -k_{fx} E_f^- \end{pmatrix}, \quad (\text{II.86a})$$

avec, pour les champs magnétiques :

$$\vec{H}_i^+ = \frac{1}{\mu_i} \vec{B}_i^+, \quad \vec{H}_i^- = \frac{1}{\mu_i} \vec{B}_i^-, \quad \vec{H}_f^+ = \frac{1}{\mu_f} \vec{B}_f^+, \quad \vec{H}_f^- = \frac{1}{\mu_f} \vec{B}_f^-. \quad (\text{II.86b})$$

La condition de continuité des composantes tangentielles des champs \vec{E} et \vec{H} permet alors d'écrire :

$$E_i^+ + E_i^- = E_f^+ + E_f^-, \quad (\text{II.87a})$$

$$E_i^+ - E_i^- = q_s (E_f^+ - E_f^-), \quad (\text{II.87b})$$

où le coefficient q_s (l'indice 's' se référant à l'état de polarisation s , ou TE) prend la forme suivante :

$$q_s = \frac{\mu_i}{\mu_f} \frac{k_{fz}}{k_{iz}} = \frac{\mu_i}{\mu_f} \frac{k_f \cos \theta_f}{k_i \cos \theta_i} = \frac{k_f \cos \theta_f}{k_i \cos \theta_i}, \quad (\text{II.88})$$

si l'on considère que les deux milieux sont non-magnétiques et que donc $\mu_i = \mu_f = \mu_0$.

Dès lors, les coefficients de réflexion et de transmission précédemment introduits s'expriment selon :

$$r_s = \left(\frac{E_i^-}{E_i^+} \right)_{E_f=0} = \frac{1-q_s}{1+q_s}, \quad r'_s = \left(\frac{E_f^+}{E_f^-} \right)_{E_i=0} = \frac{q_s-1}{1+q_s} = -r_s, \quad (\text{II.89a})$$

$$t_s = \left(\frac{E_f^+}{E_i^+} \right)_{E_f=0} = \frac{2}{1+q_s}, \quad t'_s = \left(\frac{E_i^-}{E_f^-} \right)_{E_i=0} = \frac{2q_s}{1+q_s} = q_s t_s. \quad (\text{II.89b})$$

On vérifie au passage que le terme $tt' - rr'$ qui apparaît, selon l'équation (II.83), dans l'expression des éléments A_{22} et B_{22} (pour les ondes « R »), et A_{44} et B_{44} (pour les ondes « S ») des matrices d'interface [A] et [B] est, pour une interface diélectrique simple, égal à 1.

b) POLARISATION TM (p)

Dans cette configuration, ce sont les champs magnétiques \vec{H}_i^+ , \vec{H}_i^- , \vec{H}_f^+ et \vec{H}_f^- des quatre ondes en interaction qui sont parallèles à (Oy), et l'on a (Fig. II.7) :

$$\vec{H}_i^+ = H_i^+ \vec{e}_y, \quad \vec{H}_i^- = H_i^- \vec{e}_y, \quad \vec{H}_f^+ = H_f^+ \vec{e}_y, \quad \vec{H}_f^- = H_f^- \vec{e}_y, \quad (\text{II.90a})$$

$$\vec{B}_i^+ = \mu_i H_i^+ \vec{e}_y, \quad \vec{B}_i^- = \mu_i H_i^- \vec{e}_y, \quad \vec{B}_f^+ = \mu_f H_f^+ \vec{e}_y, \quad \vec{B}_f^- = \mu_f H_f^- \vec{e}_y, \quad (\text{II.90b})$$

et, à nouveau, toujours avec $k_i = \|\vec{k}_i^+\| = \|\vec{k}_i^-\|$ et $k_f = \|\vec{k}_f^+\| = \|\vec{k}_f^-\|$:

$$\vec{k}_i^+ = \begin{pmatrix} k_{ix} = k_i \sin \theta_i \\ 0 \\ k_{iz} = k_i \cos \theta_i \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_i^- = \begin{pmatrix} k_{ix} = k_i \sin \theta_i \\ 0 \\ -k_{iz} = -k_i \cos \theta_i \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_f^+ = \begin{pmatrix} k_{fx} = k_f \sin \theta_f \\ 0 \\ k_{fz} = k_f \cos \theta_f \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_f^- = \begin{pmatrix} k_{fx} = k_f \sin \theta_f \\ 0 \\ -k_{fz} = -k_f \cos \theta_f \end{pmatrix} \quad (\text{II.91})$$

À nouveau dans le cadre de l'hypothèse des enveloppes lentement variables, pour chacun de ces champs, l'équation de Maxwell-Ampère $\vec{\text{rot}} \vec{H} = \partial \vec{D} / \partial t$ entraîne en première approximation $\omega \vec{D} = -\vec{k} \wedge \vec{H}$, et il en découle les relations suivantes :

$$\omega \vec{D}_i^+ = \begin{pmatrix} k_{iz} H_i^+ \\ 0 \\ -k_{ix} H_i^+ \end{pmatrix}, \quad \omega \vec{D}_i^- = \begin{pmatrix} -k_{iz} H_i^- \\ 0 \\ k_{ix} H_i^- \end{pmatrix}, \quad \omega \vec{D}_f^+ = \begin{pmatrix} k_{fz} H_f^+ \\ 0 \\ -k_{fx} H_f^+ \end{pmatrix}, \quad \omega \vec{D}_f^- = \begin{pmatrix} -k_{fz} H_f^- \\ 0 \\ k_{fx} H_f^- \end{pmatrix}, \quad (\text{II.92a})$$

et, pour les champs électriques :

$$\vec{E}_i^+ = \frac{1}{\varepsilon_i} \vec{D}_i^+, \quad \vec{E}_i^- = \frac{1}{\varepsilon_i} \vec{D}_i^-, \quad \vec{E}_f^+ = \frac{1}{\varepsilon_f} \vec{D}_f^+, \quad \vec{E}_f^- = \frac{1}{\varepsilon_f} \vec{D}_f^-. \quad (\text{II.92b})$$

C'est à nouveau la condition de continuité des composantes tangentielles des champs \vec{E} et \vec{H} qui nous permet, cette fois-ci, d'obtenir :

$$H_i^+ + H_i^- = H_f^+ + H_f^-, \quad (\text{II.93a})$$

$$H_i^+ - H_i^- = q_p (H_f^+ - H_f^-), \quad (\text{II.93b})$$

le coefficient q_p (où l'indice 'p' se rapporte à l'état de polarisation p , ou TM) étant égal à :

$$q_p = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_f} \frac{k_{fz}}{k_{iz}} = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_f} \frac{k_f \cos \theta_f}{k_i \cos \theta_i}. \quad (\text{II.94})$$

Il est cependant d'usage que les coefficients de réflexion et de transmission soient définis par des rapports d'amplitudes des champs électriques en interaction, et il nous faut donc déterminer les relations qu'elles entretiennent en polarisation TM.

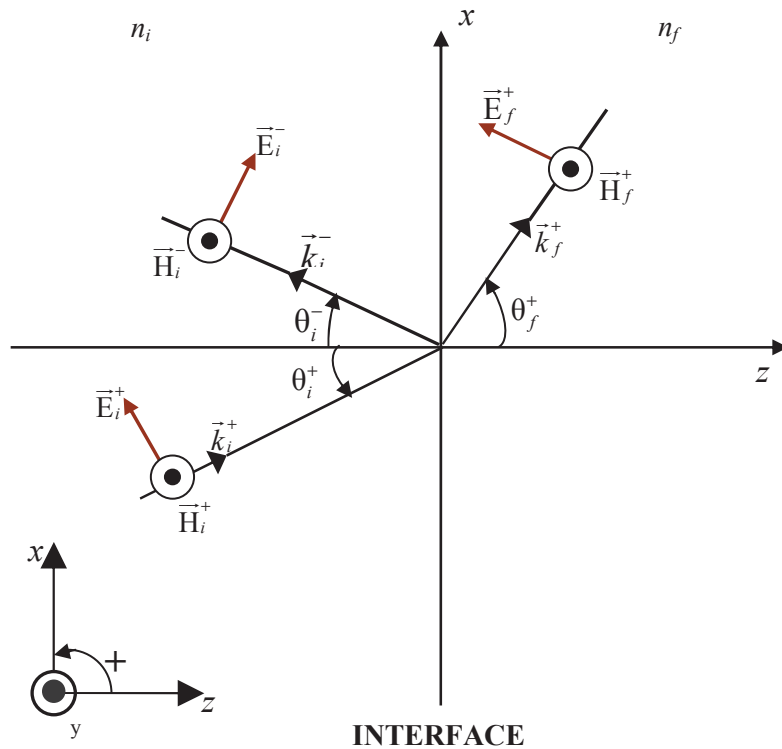


Fig. II.7 : Interface entre un milieu (i) d'indice de réfraction n_i et un milieu (f) d'indice de réfraction n_f . Les directions des vecteurs champs électriques et magnétiques sont représentées ici dans l'état de polarisation TM.

La convention veut que les vecteurs directeurs des champs électriques aient tous une composante tangentielle positive selon (Ox), comme le montre la figure II.7. Les angles algébriques θ_i et θ_f étant positifs, ces vecteurs unitaires s'écrivent alors :

$$\vec{e}_i^+ = \begin{pmatrix} \cos \theta_i \\ 0 \\ -\sin \theta_i \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_i^- = \begin{pmatrix} \cos \theta_i \\ 0 \\ \sin \theta_i \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_f^+ = \begin{pmatrix} \cos \theta_f \\ 0 \\ -\sin \theta_f \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_f^- = \begin{pmatrix} \cos \theta_f \\ 0 \\ \sin \theta_f \end{pmatrix}. \quad (\text{II.95})$$

L'équation $\omega \epsilon \vec{E} = -\vec{k} \wedge \vec{H}$ appliquée à chacune des ondes impose alors, par identification des composantes, les relations suivantes :

$$E_i^+ = \frac{k_i}{\omega \epsilon_i} H_i^+, \quad E_i^- = -\frac{k_i}{\omega \epsilon_i} H_i^-, \quad E_f^+ = \frac{k_f}{\omega \epsilon_f} H_f^+, \quad E_f^- = -\frac{k_f}{\omega \epsilon_f} H_f^-. \quad (\text{II.96})$$

Compte-tenu de ce qui précède, on montre alors que les coefficients de Fresnel s'écrivent, en polarisation TM :

$$r_p = \left(\frac{E_i^-}{E_i^+} \right)_{E_f^\pm=0} = -\left(\frac{1-q_p}{1+q_p} \right), \quad r'_p = \left(\frac{E_f^+}{E_f^-} \right)_{E_i^\pm=0} = \frac{1-q_p}{1+q_p} = -r_p, \quad (\text{II.97a})$$

$$t_p = \left(\frac{E_f^+}{E_i^+} \right)_{E_f^-=0} = \frac{k_f}{k_i} \frac{\epsilon_i}{\epsilon_f} \left(\frac{2}{1+q_p} \right), \quad t'_p = \left(\frac{E_i^-}{E_f^-} \right)_{E_i^+=0} = \frac{k_i}{k_f} \frac{\epsilon_f}{\epsilon_i} \left(\frac{2q_p}{1+q_p} \right). \quad (\text{II.97b})$$

À nouveau, on peut vérifier que le terme $tt' - rr'$ présent dans les matrices d'interface est égal à 1.

Notons par ailleurs que le facteur $\frac{k_f}{k_i} \frac{\epsilon_i}{\epsilon_f}$ n'est autre, de manière générale, qu'un rapport d'impédances d'onde lors du passage d'un milieu à l'autre, et traduit donc le saut d'impédance subi par l'onde à la traversée de l'interface.

On peut le noter $\hat{Z}_{if} = \frac{Z_f}{Z_i} = \frac{k_f}{k_i} \frac{\epsilon_i}{\epsilon_f}$, où Z_i et Z_f sont les impédances d'onde de part et d'autre de l'interface, et réécrire les relations portant sur les coefficients de transmission selon :

$$t_p = \hat{Z}_{if} \left(\frac{2}{1+q_p} \right), \quad t'_p = \frac{1}{\hat{Z}_{if}} \left(\frac{2q_p}{1+q_p} \right). \quad (\text{II.98})$$

Remarquons qu'à l'instar des coefficients q_p et q_s , les rapports d'impédance \hat{Z}_{if} aux interfaces dépendent du type d'onde, « R » ou « S », que l'on considère.

L'ensemble des relations obtenues dans ce paragraphe peuvent maintenant être adaptées aux différentes situations rencontrées dans la structure : ondes « R » ou « S », polarisation TE (s) ou TM (p), interfaces A ou B. Dans un premier temps, nous pouvons donner une forme générique réduite des éléments des matrices d'interface en fonction des paramètres $q_{p,s}$, puis nous précisons les expressions de ces coefficients, pour chaque type d'onde et chaque état de

polarisation, en fonction des indices de réfraction des milieux séparés par l'interface et des angles d'incidence ou d'émergence des ondes.

IV.1.3. FORME RÉDUITE DES ÉLÉMENTS DE MATRICES D'INTERFACE

Compte-tenu de ce qui précède, on peut déterminer une expression des matrices de miroirs, dans le cas où ces « miroirs » sont de simples interfaces séparant deux milieux diélectriques isotropes et non-magnétiques indicés respectivement « i » et « f ».

Dans ce cas, les coefficients de réflexion et de transmission sont, on l'a vu, des coefficients de Fresnel qui peuvent s'exprimer de manière canonique en fonction de paramètres réduits q_s^R , q_s^S , q_p^R et q_p^S (suivant le type d'ondes et l'état de polarisation) et, pour la polarisation TM (p), d'un facteur traduisant le saut d'impédance au passage de l'interface :

$$\underline{\text{TE}}(s) : \begin{pmatrix} R^+ \\ R^- \\ S^+ \\ S^- \end{pmatrix}_{z=z_i} = \begin{pmatrix} \frac{1+q_s^R}{2} & \frac{1-q_s^R}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1-q_s^R}{2} & \frac{1+q_s^R}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+q_s^S}{2} & \frac{1-q_s^S}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1-q_s^S}{2} & \frac{1+q_s^S}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^+ \\ R^- \\ S^+ \\ S^- \end{pmatrix}_{z=z_f}, \quad (\text{II.99a})$$

$$\underline{\text{TM}}(p) : \begin{pmatrix} R^+ \\ R^- \\ S^+ \\ S^- \end{pmatrix}_{z=z_i} = \begin{pmatrix} \frac{1+q_p^R}{2\hat{Z}_{if}^R} & -\left(\frac{1-q_p^R}{2\hat{Z}_{if}^R}\right) & 0 & 0 \\ -\left(\frac{1-q_p^R}{2\hat{Z}_{if}^R}\right) & \frac{1+q_p^R}{2\hat{Z}_{if}^R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+q_p^S}{2\hat{Z}_{if}^S} & -\left(\frac{1-q_p^S}{2\hat{Z}_{if}^S}\right) \\ 0 & 0 & -\left(\frac{1-q_p^S}{2\hat{Z}_{if}^S}\right) & \frac{1+q_p^S}{2\hat{Z}_{if}^S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^+ \\ R^- \\ S^+ \\ S^- \end{pmatrix}_{z=z_f} \quad (\text{II.99b})$$

Il ne reste plus, dès lors, qu'à remplacer dans ces matrices, les quadruplets $\{q_s^R, q_s^S, q_p^R, q_p^S\}$ par leurs valeurs $\{q_s^{AR}, q_s^{AS}, q_p^{AR}, q_p^{AS}\}$ ou $\{q_s^{BR}, q_s^{BS}, q_p^{BR}, q_p^{BS}\}$ suivant l'interface considérée.

IV.1.4. CAS DES ONDES « R » RÉFRACTÉE ET RÉFLÉCHIE

Les coefficients de Fresnel aux interfaces et les éléments des matrices d'interface [A] et [B] peuvent, on l'a vu, s'écrire pour ces ondes en fonction des paramètres réduits q_s et q_p :

$$q_s = \frac{k_f \cos \theta_f}{k_i \cos \theta_i}, \quad q_p = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_f} \frac{k_f \cos \theta_f}{k_i \cos \theta_i}. \quad (\text{II.100})$$

Le tableau ci-dessous précise les valeurs des paramètres servant au calcul de ces coefficients, pour les ondes dites « R », à chacune des deux interfaces A (n_0/n_m) et B (n_m/n_2), et pour chacun des états de polarisation fondamentaux. L'onde « R » incidente à l'interface A est entièrement décrite par sa pulsation ω et son angle d'incidence $\theta_{R_0}^+$.

		POLARISATION	
		TE	TM
INTERFACE	A	$q_s = q_s^{\text{AR}}$ $k_i = k_{R_0} = \ \vec{k}_{R_0}^+\ = \ \vec{k}_{R_0}^-\ = \frac{\omega}{c} n_0$ $k_f = k_{R_1} = \ \vec{k}_{R_1}^+\ = \ \vec{k}_{R_1}^-\ = \frac{\omega}{c} n_m$ $\theta_i = \theta_{R_0}^+$ $\theta_f = \theta_{R_1}^+ = \arcsin\left(\frac{n_0}{n_m} \sin \theta_{R_0}^+\right)$	$q_p = q_p^{\text{AR}}$ $\varepsilon_i = \varepsilon_0 n_0^2, \varepsilon_f = \varepsilon_0 n_m^2$ $k_i = k_{R_0} = \ \vec{k}_{R_0}^+\ = \ \vec{k}_{R_0}^-\ = \frac{\omega}{c} n_0$ $k_f = k_{R_1} = \ \vec{k}_{R_1}^+\ = \ \vec{k}_{R_1}^-\ = \frac{\omega}{c} n_m$ $\theta_i = \theta_{R_0}^+$ $\theta_f = \theta_{R_1}^+ = \arcsin\left(\frac{n_0}{n_m} \sin \theta_{R_0}^+\right)$ $\hat{Z}_{01}^R = \frac{k_{R_1}}{k_{R_0}} \frac{n_0^2}{n_m^2}$
	B	$q_s = q_s^{\text{BR}}$ $k_i = k_{R_1} = \ \vec{k}_{R_1}^+\ = \ \vec{k}_{R_1}^-\ = \frac{\omega}{c} n_m$ $k_f = k_{R_2} = \ \vec{k}_{R_2}^+\ = \frac{\omega}{c} n_2$ $\theta_i = \theta_{R_1}^+ = \arcsin\left(\frac{n_0}{n_m} \sin \theta_{R_0}^+\right)$ $\theta_f = \theta_{R_2}^+ = \arcsin\left(\frac{n_0}{n_2} \sin \theta_{R_0}^+\right)$	$q_p = q_p^{\text{BR}}$ $\varepsilon_i = \varepsilon_0 n_m^2, \varepsilon_f = \varepsilon_0 n_2^2$ $k_i = k_{R_1} = \ \vec{k}_{R_1}^+\ = \ \vec{k}_{R_1}^-\ = \frac{\omega}{c} n_m$ $k_f = k_{R_2} = \ \vec{k}_{R_2}^+\ = \frac{\omega}{c} n_2$ $\theta_i = \theta_{R_1}^+ = \arcsin\left(\frac{n_0}{n_m} \sin \theta_{R_0}^+\right)$ $\theta_f = \theta_{R_2}^+ = \arcsin\left(\frac{n_0}{n_2} \sin \theta_{R_0}^+\right)$ $\hat{Z}_{12}^R = \frac{k_{R_2}}{k_{R_1}} \frac{n_m^2}{n_2^2}$

IV.1.5. CAS DES ONDES « S » DIFFRACTÉE ET RÉTRODIFFRACTÉE

De même, nous avons pu établir que les coefficients de Fresnel aux interfaces et les éléments des matrices d'interface [A] et [B] peuvent, pour les ondes « S », s'écrire en fonction des paramètres réduits q_s et q_p , définis de la même manière que pour les ondes « R » :

$$q_s = \frac{k_f \cos \theta_f}{k_i \cos \theta_i}, \quad q_p = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_f} \frac{k_f \cos \theta_f}{k_i \cos \theta_i}. \quad (\text{II.101})$$

La principale différence, cependant, entre ondes « R » et « S », est que si les premières obéissent à une loi de dispersion classique, les secondes, en revanche, n'existent que par la présence des premières et, surtout, du réseau de diffraction, et que leurs vecteurs d'ondes doivent vérifier une relation d'accord de phase qui leur confère une loi de dispersion « anormale ». On a ainsi, dans l'hologramme :

$$\vec{k}_{R_1}^+ = \vec{k}_{S_1}^+ + \vec{K}_x \text{ et } \vec{k}_{R_1}^- = \vec{k}_{S_1}^- + \vec{K}_x. \quad (\text{II.102})$$

Dès lors, la norme k_{S_1} des vecteurs d'ondes des ondes « S » au sein du milieu holographique inhomogène, nécessaire au calcul de $q_s^{\text{AS}}, q_p^{\text{AS}}, q_s^{\text{BS}}$ et q_p^{BS} , n'est pas égale à $(\omega/c) n_m$, mais à :

$$k_{S_1} = \|\vec{k}_{S_1}^+\| = \|\vec{k}_{S_1}^-\| = \sqrt{(\gamma_x - K_x)^2 + \beta_1^2}, \quad (\text{II.103})$$

où $\gamma_x = \frac{\omega}{c} n_0 \sin \theta_{R_0}^+$ est la composante tangentielle commune à tous les vecteurs d'ondes « R », dans l'H1D et dans les milieux qui l'entourent — tandis que $(\gamma_x - K_x)$ est la composante tangentielle commune à tous les vecteurs d'ondes « S » — et où β_1 , composante normale commune, au signe près, à tous les vecteurs d'ondes, « R » comme « S », dans l'H1D, peut elle aussi s'exprimer en fonction des conditions d'injection par l'interface A et des indices des milieux, selon :

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c} n_m \cos \theta_{R_1}^+ = \frac{\omega}{c} n_m \cos \left[\arcsin \left(\frac{n_0}{n_m} \sin \theta_{R_0}^+ \right) \right]. \quad (\text{II.104})$$

L'angle algébrique $\theta_{S_1}^+$ qui repère l'inclinaison des vecteurs $\vec{k}_{S_1}^+$ et $\vec{k}_{S_1}^-$, vérifie :

$$\theta_{S_1}^+ = \arcsin \left(\frac{\gamma_x - K_x}{k_{S_1}} \right) = \arcsin \left(\frac{\gamma_x - K_x}{\sqrt{(\gamma_x - K_x)^2 + \beta_1^2}} \right), \quad (\text{II.105})$$

et peut donc lui aussi être calculé en fonction des seuls indices de réfraction n_0 et n_m , et des conditions d'injection définies par ω et $\theta_{R_0}^+$.

Si les ondes « S » à l'intérieur de l'H1D vérifient donc une loi de dispersion anormale dictée par la condition d'accord de phase, en revanche, celles qui se propagent dans les milieux homogènes extérieurs à l'hologramme retrouvent une loi de dispersion normale : il s'agit de l'onde

de vecteur d'onde $\vec{k}_{S_2}^+$ diffractée dans le milieu d'indice n_2 à travers l'interface B, et l'onde de vecteur d'onde $\vec{k}_{S_0}^-$ rétrodiffractée dans le milieu d'indice n_0 à travers l'interface A.

On obtient ainsi :

$$k_{S_0} = k_{R_0} = \frac{\omega}{c} n_0 \text{ et } k_{S_2} = k_{R_2} = \frac{\omega}{c} n_2. \quad (\text{II.106})$$

De même, les angles $\theta_{S_2}^+$ et $\theta_{S_0}^-$ que font ces vecteurs d'onde avec l'axe (Oz) se déduisent simplement de l'angle $\theta_{S_1}^+$ par la loi de la réfraction de Snell-Descartes, avec :

$$\frac{\omega}{c} n_0 \sin \theta_{S_0}^- = -k_{S_1} \sin \theta_{S_1}^+ = -(\gamma_x - K_x), \quad (\text{II.107a})$$

$$\frac{\omega}{c} n_2 \sin \theta_{S_2}^+ = k_{S_1} \sin \theta_{S_1}^+ = \gamma_x - K_x. \quad (\text{II.107b})$$

Le tableau ci-dessous détaille, dans le cas des ondes dites « S », et pour chacun des états de polarisation fondamentaux, les valeurs des paramètres (parmi lesquels ceux dont nous venons d'établir l'expression) servant au calcul des coefficients q_s et q_p à chaque interface A ou B.

		POLARISATION	
		TE	TM
INTERFACE	A	$q_s = q_s^{\text{AS}}$ $k_i = k_{S_0} = \ \vec{k}_{S_0}^-\ = k_{R_0} = \frac{\omega}{c} n_0$ $k_f = k_{S_1} = \ \vec{k}_{S_1}^+\ = \ \vec{k}_{S_1}^-\ $ $\theta_i = \theta_{S_0}^-$ $\theta_f = \theta_{S_1}^+$	$q_p = q_p^{\text{AS}}$ $\varepsilon_i = \varepsilon_0 n_0^2, \varepsilon_f = \varepsilon_0 n_m^2$ $k_i = k_{S_0} = \ \vec{k}_{S_0}^-\ = k_{R_0} = \frac{\omega}{c} n_0$ $k_f = k_{S_1} = \ \vec{k}_{S_1}^+\ = \ \vec{k}_{S_1}^-\ $ $\theta_i = \theta_{S_0}^-$ $\theta_f = \theta_{S_1}^+$ $\hat{Z}_{01}^S = \frac{k_{S_1}}{k_{S_0}} \frac{n_0^2}{n_m^2}$
	B	$q_s = q_s^{\text{BS}}$ $k_i = k_{S_1} = \ \vec{k}_{S_1}^+\ = \ \vec{k}_{S_1}^-\ $ $k_f = k_{S_2} = \ \vec{k}_{S_2}^+\ = \frac{\omega}{c} n_2$ $\theta_i = \theta_{S_1}^+$ $\theta_f = \theta_{S_2}^+$	$q_p = q_p^{\text{BS}}$ $\varepsilon_i = \varepsilon_0 n_m^2, \varepsilon_f = \varepsilon_0 n_2^2$ $k_i = k_{S_1} = \ \vec{k}_{S_1}^+\ = \ \vec{k}_{S_1}^-\ $ $k_f = k_{S_2} = \ \vec{k}_{S_2}^+\ = \frac{\omega}{c} n_2$ $\theta_i = \theta_{S_1}^+$ $\theta_f = \theta_{S_2}^+$ $\hat{Z}_{12}^S = \frac{k_{S_2}}{k_{S_1}} \frac{n_m^2}{n_2^2}$

IV.2. COEFFICIENTS DE REPARTITION DE L'H1D

À ce stade, nous disposons de tous les outils nous permettant de calculer les éléments M_{ij} de la matrice de transfert $[M] = [A][H][B]$ de l'hologramme 1D, interfaces comprises, quel que soit l'état de polarisation considéré.

Cette matrice relie les amplitudes des champs optiques immédiatement à gauche de l'interface A à celles des champs immédiatement à droite de l'interface B.

De par la nature-même des ondes « S », qui doivent leur existence à l'interaction des ondes « R » avec le réseau de diffraction, il ne peut exister de telle onde entrant dans la structure. Par ailleurs, on suppose que l'injection de la lumière se fait exclusivement par l'interface A, et on obtient donc le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{pmatrix} E_{R_0}^+ \\ E_{R_0}^- \\ 0 \\ E_{S_0}^- \end{pmatrix}_{z=0^-} = [M] \begin{pmatrix} E_{R_2}^+ \\ 0 \\ E_{S_2}^+ \\ 0 \end{pmatrix}_{z=L^+}, \quad (\text{II.108})$$

soit encore :

$$E_{R_0}^+ = M_{11}E_{R_2}^+ + M_{13}E_{S_2}^+, \quad (\text{II.109a})$$

$$E_{R_0}^- = M_{21}E_{R_2}^+ + M_{23}E_{S_2}^+, \quad (\text{II.109b})$$

$$0 = M_{31}E_{R_2}^+ + M_{33}E_{S_2}^+, \quad (\text{II.109c})$$

$$E_{S_0}^- = M_{41}E_{R_2}^+ + M_{43}E_{S_2}^+. \quad (\text{II.109d})$$

De ce système d'équations, on peut immédiatement déduire quatre coefficients « globaux » (car portant sur l'ensemble de l'H1D, y compris ses interfaces) de réflexion r_G , transmission t_G , diffraction t_{dG} et rétrodiffraction r_{dG} en amplitude. Ainsi :

$$r_G = \frac{E_{R_0}^-}{E_{R_0}^+} = \frac{M_{21}M_{33} - M_{23}M_{31}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}}, \quad (\text{II.110})$$

$$t_G = \frac{E_{R_2}^+}{E_{R_0}^+} = \frac{M_{33}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}}, \quad (\text{II.111})$$

$$r_{dG} = \frac{E_{S_0}^-}{E_{R_0}^+} = \frac{M_{33}M_{41} - M_{31}M_{43}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}}, \quad (\text{II.112})$$

$$t_{dG} = \frac{E_{S_2}^+}{E_{R_0}^+} = \frac{-M_{31}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}}. \quad (\text{II.113})$$

On constate que ces quatre coefficients partagent un même dénominateur $D = M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}$, caractéristique d'une cavité (ici, il s'agit d'un simple Fabry-Perot

renfermant un réseau épais de diffraction en transmission). Les modes de résonance de cette cavité sont les doublets $(\omega, \theta_{R_0}^+)$ qui annulent le dénominateur D .

Classiquement, on définit, à partir des coefficients r_G , t_G , t_{dG} et r_{dG} , des coefficients énergétiques qui traduisent la répartition de l'intensité de l'onde incidente en quatre parts, prenant en compte d'éventuelles pertes (ou un éventuel gain) si le milieu holographique est de permittivité diélectrique ε_m complexe. Ces coefficients de réflexion, transmission, diffraction et rétrodiffraction, compris entre 0 et 1, sont des rapports d'intensités respectivement définis par :

$$R = \frac{k_{R_0} \cos \theta_{R_0}^-}{k_{R_0} \cos \theta_{R_0}^+} |r_G|^2 = |r_G|^2, \quad (\text{II.114})$$

$$T = \frac{k_{R_2} \cos \theta_{R_2}^+}{k_{R_0} \cos \theta_{R_0}^+} |t_G|^2 = \frac{n_2 \cos \theta_{R_2}^+}{n_0 \cos \theta_{R_0}^+} |t_G|^2 \quad (\text{II.115})$$

$$R_d = \frac{k_{S_0} \cos \theta_{S_0}^-}{k_{R_0} \cos \theta_{R_0}^+} |r_{dG}|^2 = \frac{\cos \theta_{S_0}^-}{\cos \theta_{R_0}^+} |r_{dG}|^2, \quad (\text{II.116})$$

$$T_d = \frac{k_{S_2} \cos \theta_{S_2}^+}{k_{R_0} \cos \theta_{R_0}^+} |t_{dG}|^2 = \frac{n_2 \cos \theta_{S_2}^+}{n_0 \cos \theta_{R_0}^+} |t_{dG}|^2. \quad (\text{II.117})$$

Pour des ondes TEM telles que celles que nous considérons, le vecteur de Poynting est, dans des milieux isotropes, colinéaire et proportionnel au vecteur d'onde, et, de par le théorème de Poynting, les intensités des ondes (puissances par unité de surface) dont nous calculons les rapports sont proportionnelles au flux de leur vecteur de Poynting à travers la surface traversée — ici, l'une ou l'autre des interfaces A et B — d'où les facteurs d'échelle de type $(\vec{k}_i \cdot \vec{e}_z) / (\vec{k}_f \cdot \vec{e}_z)$ qui affectent ces coefficients énergétiques.

IV.3. REPONSES OPTIQUES DE LA STRUCTURE

L'H1D est une structure diffractive, et nous nous concentrerons, dans cette partie, sur l'évolution du coefficient T_d . En développant ses numérateur et dénominateur en fonction des éléments H_{ij} de la matrice de transfert de l'H1D nu et de ceux des matrices d'interface, on peut faire apparaître explicitement les paramètres physiques dont ce coefficient dépend.

Au numérateur, on obtient ainsi, compte-tenu de ce qui précède, et quel que soit l'état de polarisation TE ou TM retenu :

$$-M_{31} = -A_{33}B_{11} \left[i \frac{\tilde{\chi}}{\Gamma} \sin(\Gamma L) e^{i(\beta_1 - \Delta)L} e^{-\alpha L} \right] - A_{34}B_{21} \left[-i \frac{\tilde{\chi}}{\Gamma} \sin(\Gamma L) e^{-i(\beta_1 - \Delta)L} e^{\alpha L} \right], \quad (\text{II.118})$$

tandis que son dénominateur s'écrit :

On remarque bien que le dénominateur contient de produits des ondes présentes dans l'hologramme par l'intermédiaire des éléments de matrices des interfaces A et B :

$$\begin{aligned}
 D = & A_{11}B_{11}A_{33}B_{33} \left[(\cos(\Gamma L))^2 + \frac{\Delta^2}{\Gamma^2} (\sin(\Gamma L))^2 \right] e^{2i(\beta_1 - \Delta)L} e^{-2\alpha L} \\
 & + A_{11}B_{11}A_{34}B_{43} \left[\cos(\Gamma L) + i \frac{\Delta}{\Gamma} \sin(\Gamma L) \right]^2 + A_{12}B_{21}A_{33}B_{33} \left[\cos(\Gamma L) - i \frac{\Delta}{\Gamma} \sin(\Gamma L) \right]^2 \\
 & + A_{12}B_{21}A_{34}B_{43} \left[(\cos(\Gamma L))^2 + \frac{\Delta^2}{\Gamma^2} (\sin(\Gamma L))^2 \right] e^{-2i(\beta_1 - \Delta)L} e^{2\alpha L} \\
 & - A_{11}B_{33}A_{33}B_{11} \left[-\frac{\chi\tilde{\chi}}{\Gamma^2} (\sin(\Gamma L))^2 \right] e^{2i(\beta_1 - \Delta)L} e^{-2\alpha L} \\
 & - A_{11}B_{33}A_{34}B_{21} \left[\frac{\chi\tilde{\chi}}{\Gamma^2} (\sin(\Gamma L))^2 \right] - A_{12}B_{43}A_{33}B_{11} \left[\frac{\chi\tilde{\chi}}{\Gamma^2} (\sin(\Gamma L))^2 \right] \\
 & - A_{12}B_{43}A_{34}B_{21} \left[-\frac{\chi\tilde{\chi}}{\Gamma^2} (\sin(\Gamma L))^2 \right] e^{-2i(\beta_1 - \Delta)L} e^{2\alpha L}
 \end{aligned} \tag{II.119}$$

Il est intéressant de se concentrer sur le comportement de ces termes dans les régions où l'on s'attend à ce que la diffraction soit favorisée, autour de la condition de Bragg. Cette dernière est satisfaite lorsque le désaccord de phase co-directionnel s'annule ($\Delta = 0$) :

$$\Delta = K_x (K_x - 2\gamma_x) / 4\beta_1 = 0, \tag{II.120}$$

d'où :

$$K_x = 2\gamma_x = 2k_{R_1} \sin(\theta_{R_1}^+). \tag{II.121}$$

De cette dernière équation, on déduit alors l'angle de Bragg de l'onde de référence interne à l'hologramme 1D, et son homologue dans le milieu incident :

$$\theta_{R_1}^{+ \text{ Bragg}} = \arcsin\left(\frac{\lambda_0}{2n_m\Lambda_x}\right) \text{ et } \theta_{R_0}^{+ \text{ Bragg}} = \arcsin\left[\frac{n_m \sin(\theta_{R_1}^+)}{n_0}\right]. \tag{II.122}$$

Lorsque la condition de Bragg est satisfaite, on constate que les normes de vecteurs d'ondes de l'onde diffractée interne et de l'onde de référence interne sont égales :

$$\|\vec{k}_{S_1}^+\| = k_{S_1} = \sqrt{(\gamma_x - K_x)^2 + \beta_1^2} = \sqrt{\gamma_x^2 + \beta_1^2} = \|\vec{k}_{R_1}^+\| = k_{R_1}. \tag{II.123}$$

Cette condition est représentée sur la figure II.8, où le triangle (*TOD*) est un triangle isocèle et les angles $\theta_{R_1}^+$ et $\theta_{S_1}^+$, associés à la direction du vecteur de propagation de l'onde de référence interne et à celle de l'onde diffractée interne sont donc égaux.

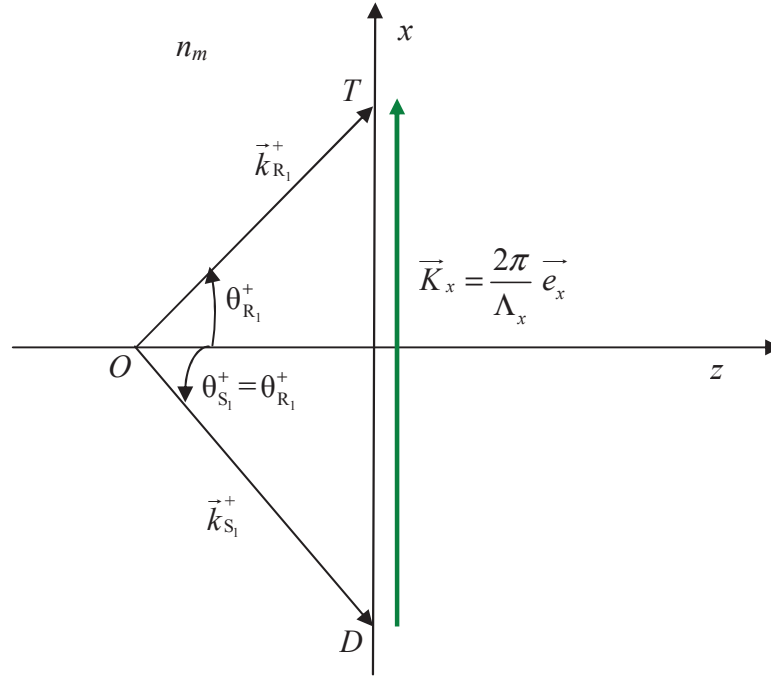


Fig. II.8 : Vecteurs d'ondes de l'onde de référence interne et de l'onde diffractée lorsque la condition angulaire de Bragg est vérifiée.

Lorsque la condition de Bragg est ainsi satisfaite, avec $\Delta = 0$, le paramètre Γ prend la valeur $\sqrt{\chi\tilde{\chi}}$ et le numérateur M_{13} prend alors la forme :

$$M_{31}^{\text{Bragg}} = -i \frac{\tilde{\chi}}{\sqrt{\chi\tilde{\chi}}} \sin(\sqrt{\chi\tilde{\chi}}L) \left[A_{33}B_{11} e^{i\beta_1 L} e^{-\alpha L} - A_{34}B_{21} e^{-i\beta_1 L} e^{\alpha L} \right], \quad (\text{II.124})$$

tandis que dénominateur D devient :

$$\begin{aligned} D^{\text{Bragg}} = & A_{11}B_{11}A_{33}B_{33} \left[\left(\cos(\sqrt{\chi\tilde{\chi}}L) \right)^2 \right] e^{2i\beta_1 L} e^{-2\alpha L} + A_{11}B_{11}A_{34}B_{43} \left[\cos(\sqrt{\chi\tilde{\chi}}L) \right]^2 \\ & + A_{12}B_{21}A_{33}B_{33} \left[\cos(\sqrt{\chi\tilde{\chi}}L) \right]^2 + A_{12}B_{21}A_{34}B_{43} \left[\cos(\sqrt{\chi\tilde{\chi}}L) \right]^2 e^{-2i\beta_1 L} e^{2\alpha L} \\ & + A_{11}B_{33}A_{33}B_{11} \left[\left(\sin(\sqrt{\chi\tilde{\chi}}L) \right)^2 \right] e^{2i\beta_1 L} e^{-2\alpha L} - A_{11}B_{33}A_{34}B_{21} \left[\left(\sin(\sqrt{\chi\tilde{\chi}}L) \right)^2 \right] \\ & - A_{12}B_{43}A_{33}B_{11} \left[\left(\sin(\sqrt{\chi\tilde{\chi}}L) \right)^2 \right] + A_{12}B_{43}A_{34}B_{21} \left[\left(\sin(\sqrt{\chi\tilde{\chi}}L) \right)^2 \right] e^{-2i\beta_1 L} e^{2\alpha L} \end{aligned} \quad (\text{II.125})$$

Remarquons que dans le cas où la modulation de permittivité est réelle, avec $\chi = \tilde{\chi}$, alors le paramètre $\Gamma = \sqrt{\chi\tilde{\chi}} = |\chi| = |\tilde{\chi}|$.

Dans ce qui suit, nous illustrons les calculs de ce chapitre en représentant les variations du coefficient de diffraction énergétique en fonction de plusieurs paramètres expérimentaux (angle d'incidence et longueur d'onde) et structuraux (modulation de permittivité,...) de l'hologramme 1D dans le cas où l'onde de référence optique incidente est polarisée dans l'état TE, pour l'essentiel autour de la condition de Bragg, c'est-à-dire lorsque $T_d \approx |M_{31}^{\text{Bragg}} / D^{\text{Bragg}}|^2$. Des

résultats analogues sont obtenus en polarisation TM. Ces simulations ont été obtenues sous Matlab. Pour chaque simulation, un tableau récapitule les paramètres fixes et la plage de valeurs du paramètre variable.

IV.3.1. RÉPONSES SPECTRALES

Pour cette simulation, on fait varier la longueur d'onde de l'onde de référence incidente sur l'hologramme en maintenant constants tous les autres paramètres, et on étudie l'évolution du coefficient de diffraction pour un angle d'incidence proche de l'angle de Bragg sur l'hologramme.

$0,4 \mu\text{m} \leq \lambda_0 \leq 0,8 \mu\text{m}$ (pas = 0,001 μm)	$\epsilon'_m = 2,25$ $n_m = 1,5$	$n_0 = 1$ $n_2 = 1$	$\epsilon''_m = 0$	$\epsilon'_{1x} = 0,02$
$\epsilon''_{1x} = 0$	$L = 50 \mu\text{m}$	$\psi''_x = 20^\circ$	$\theta_{R_0}^+ = 18,36^\circ$	$\Lambda_x = 1 \mu\text{m}$

La longueur d'onde de l'onde de référence qui lit l'hologramme 1D, varie dans le domaine visible du spectre électromagnétique de la lumière. Nous choisissons donc dans toutes les simulations qui suivent, une longueur d'onde de l'onde de référence de lecture comprise dans le domaine visible. Le milieu holographique possède un indice de réfraction moyen réel ($n_m=1,5$). Nous avons choisi donc un milieu holographique qui est lui-même, constitué du verre. L'amplitude de la modulation de la partie réelle de permittivité diélectrique de l'hologramme 1D (ϵ'_{1x}) est choisie de telle sorte que sa valeur soit faible et très inférieure par rapport à la permittivité diélectrique réelle, moyenne de l'hologramme (ϵ'_m). Dans cette simulation, l'hologramme 1D ne possède pas un fond continu d'absorption ni de l'amplification ($\epsilon''_m=0$). La période spatiale de l'hologramme 1D (Λ_x) est en relation avec l'angle d'incidence de Bragg de l'onde de référence ($\theta_{R_0}^{+ \text{Bragg}} = 18,4^\circ$) lorsque la condition de Bragg est satisfaite (II.122). D'autre part, dans cette simulation, l'angle d'incidence de l'onde de référence ($\theta_{R_0}^+$) est très proche de l'angle d'incidence de Bragg. L'épaisseur de l'hologramme 1D (L) est choisie de telle sorte que sa valeur obéit à l'hypothèse du réseau épais. Cette épaisseur est également cinquante fois plus grande à la période spatiale de l'hologramme 1D.

On observe (Fig. II.9) que le coefficient de diffraction énergétique est maximal, de l'ordre de 87%, à une longueur d'onde incidente spécifique centrée dans une plage spectrale comprise entre 0,6 μm à 0,67 μm . Sa valeur est négligeable en dehors de cette plage spectrale. Cette longueur d'onde, pour laquelle le coefficient de diffraction est à son maximum, correspondant à la longueur d'onde de Bragg lorsque le désaccord de phase co-directionnel est nul. Cette longueur d'onde de Bragg vaut :

$$\lambda_0^{\text{Bragg}} = 2 \Lambda_x n_0 \sin(\theta_{R_0}^+) = 0,63 \mu\text{m} \quad (\text{II.126})$$

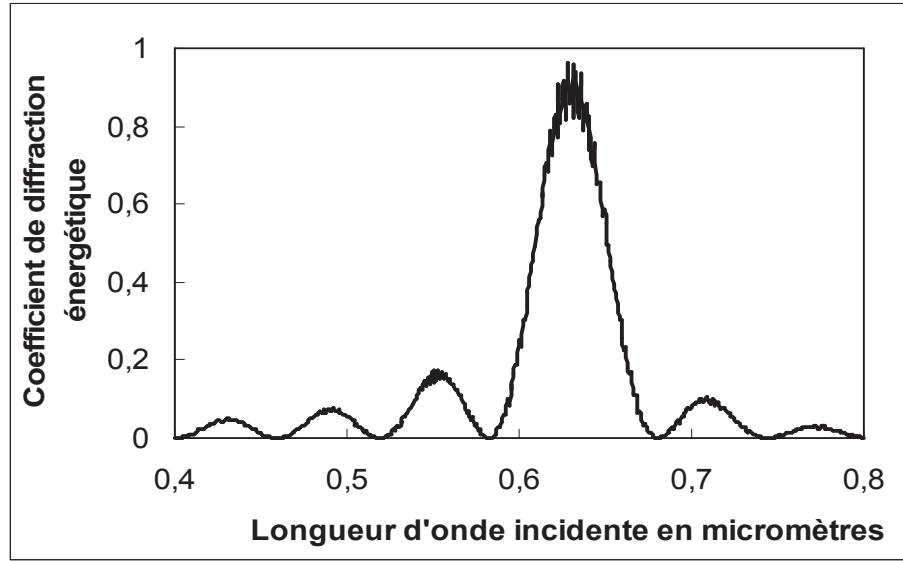


Fig. II.9 : Coefficient de diffraction en fonction de la longueur d'onde incidente

Nous nous attendons bien à ce que l'on observe une forte efficacité de diffraction lorsque la condition de Bragg est satisfaite [Massenot 06], [He 08].

IV.3.2. RÉPONSE ANGULAIRE

On fait ici varier l'angle d'incidence de l'onde de référence incidente sur l'hologramme en maintenant constants tous les autres paramètres.

$\lambda_0 = 0,632 \mu\text{m}$	$\varepsilon'_m = 2,25$ $n_m = 1,5$	$n_0 = 1$ $n_2 = 1$	$\varepsilon''_m = 0$	$\varepsilon'_{lx} = 0,02$
$\varepsilon''_{lx} = 0$	$L = 50 \mu\text{m}$	$\psi''_x = 20^\circ$	$0^\circ \leq \theta_{R_0}^+ \leq 89,9^\circ$ (pas = $0,1^\circ$)	$\Lambda_x = 1 \mu\text{m}$

Dans cette simulation, l'onde de référence incidente sur l'hologramme 1D, possède une longueur d'onde, de la couleur du rouge, obtenue par un laser He-Néon.

On remarque (Fig. II.10) que T_d prend de fortes valeurs dans une plage angulaire comprise entre 15° et 22° , qui englobe l'angle de Bragg externe défini par :

$$\theta_{R_0}^{+ \text{ Bragg}} = \arcsin \left[\frac{\lambda_0}{2n_0\Lambda_x} \right] = 18,42^\circ, \quad (\text{II.127})$$

ce qui correspond à un angle de Bragg interne de :

$$\theta_{R_1}^{+ \text{ Bragg}} = \arcsin \left[n_0 \sin(\theta_{R_0}^{+ \text{ Bragg}}) / n_m \right] = 12,1218^\circ. \quad (\text{II.128})$$

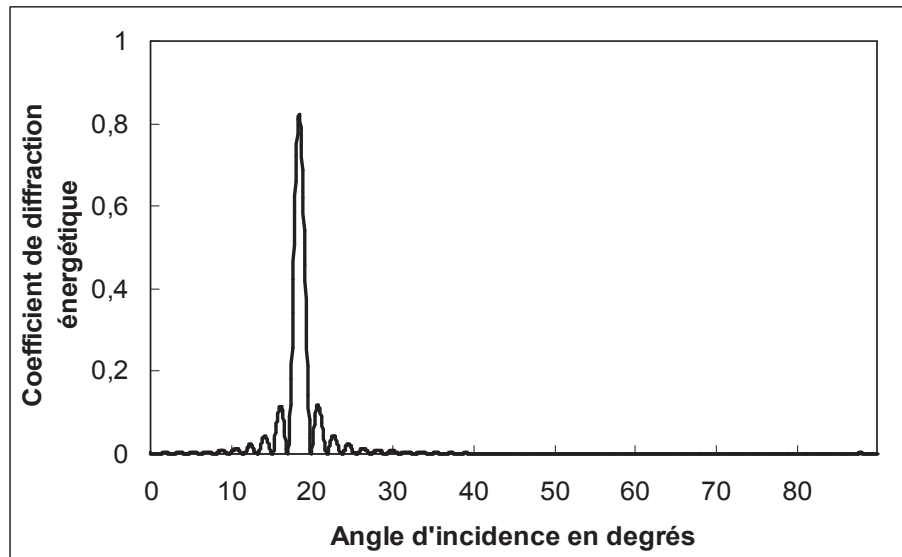


Fig. II.10 : Coefficient de diffraction en fonction de l'angle d'incidence externe.

La proportion d'onde diffractée est importante, soit de l'ordre de 83%, lorsque l'onde de référence incidente arrive avec un angle d'incidence de Bragg. Ce résultat est en accord avec de travaux précédents déjà mis en place [Kogelnik 69], [Massenot 06], [He 08]. D'autre part, nous confirmons dans cette simulation que l'énergie de l'onde incidente est conservée, c'est-à-dire que la somme de quatre coefficients énergétiques (de diffraction, de transmission, de réflexion, et de rétrodiffraction) vaut 1, soit de l'ordre de 100%, car l'hologramme 1D ne possède pas un fond continu d'absorption, ni de l'amplification.

IV.3.3. RÉPONSES EN FONCTION DES PARAMÈTRES STRUCTURELS

A. DÉSACCORD DE PHASE CO-DIRECTIONNEL NORMALISÉ

Pour cette simulation, on fait varier le désaccord de phase co-directionnel normalisé ΔL en maintenant constants tous les autres paramètres.

$\lambda_0 = 0,632 \mu\text{m}$	$\varepsilon'_m = 2,25$ $n_m = 1,5$	$n_0 = 1$ $n_2 = 1$	$\varepsilon''_m = 0$	$\varepsilon'_{1x} = 0,02$
$\varepsilon''_{1x} = 0$	$L = 50 \mu\text{m}$	$\psi''_x = 20^\circ$	$0^\circ \leq \theta_{R_0}^+ \leq 89,9^\circ$ (pas = $0,1^\circ$)	$\Lambda_x = 1 \mu\text{m}$

Nous varions dans un premier temps, l'angle d'incidence, qui est relié au désaccord de phase co-directionnel.

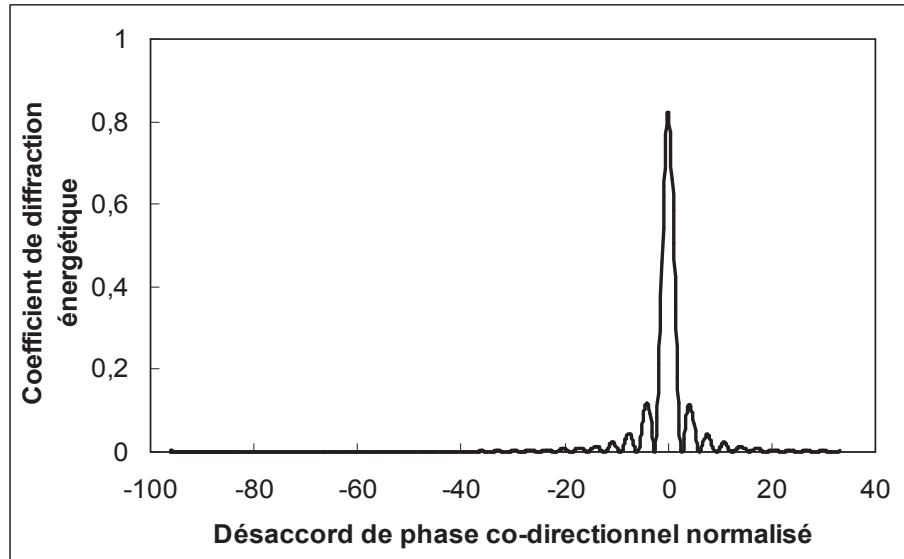


Fig. II.11 : Coefficient de diffraction en fonction du désaccord de phase co-directionnel normalisé (ΔL)

Environ 83% de l'énergie de l'onde optique incidente sur l'hologramme 1D est transférée à l'onde diffractée lorsque le désaccord de phase est nul, ce qui montre que l'échange d'énergie entre les ondes co-propagatives (onde de référence interne et onde diffractée interne) à l'intérieur de l'hologramme est maximal lorsque la condition de Bragg est satisfaite. La valeur maximale n'est pas 100%, car il existe une onde réfléchie et une onde rétrodiffractée du fait de la présence des interfaces aux extrémités de l'hologramme 1D.

Ce désaccord de phase représente l'écart au *synchronisme parfait* : les deux ondes se propagent dans le même sens, par exemple dans les z croissants, à l'intérieur de l'hologramme, mais pas nécessairement à la même vitesse de phase. Le *synchronisme parfait* est obtenu quand ce désaccord de phase est nul $\Delta = 0$ et l'échange énergétique entre les deux ondes est donc maximal. Rappelons que lorsque $\Delta = 0$, les vecteurs d'ondes de propagation de l'onde de référence interne et de l'onde diffractée interne à l'intérieur de l'hologramme sont en phase et de même normes, ce qui favorise un échange d'énergie efficace.

B. COEFFICIENT DE COUPLAGE CO-DIRECTIONNEL NORMALISÉ

Pour cette simulation, on fait varier le coefficient de couplage co-directionnel normalisé en maintenant constants tous les autres paramètres. On étudie l'évolution du coefficient de diffraction pour un angle d'incidence proche de l'angle de Bragg.

$\lambda_0 = 0,632 \mu\text{m}$	$\varepsilon'_m = 2,25$ $n_m = 1,5$	$n_0 = 1$ $n_2 = 1$	$\varepsilon''_m = 0$	$0 \leq \varepsilon'_{lx} \leq 0,1$ (pas = 0,0001)
$\varepsilon''_{lx} = 0$	$L = 50 \mu\text{m}$	$\psi''_x = 20^\circ$	$\theta_{R_0}^+ = 18,36^\circ$	$\Lambda_x = 1 \mu\text{m}$

Pour obtenir une variation du coefficient de couplage normalisé, on fait varier l'amplitude de la modulation de la partie réelle de permittivité diélectrique ϵ'_{1x} du matériau dans lequel l'hologramme est inscrit.

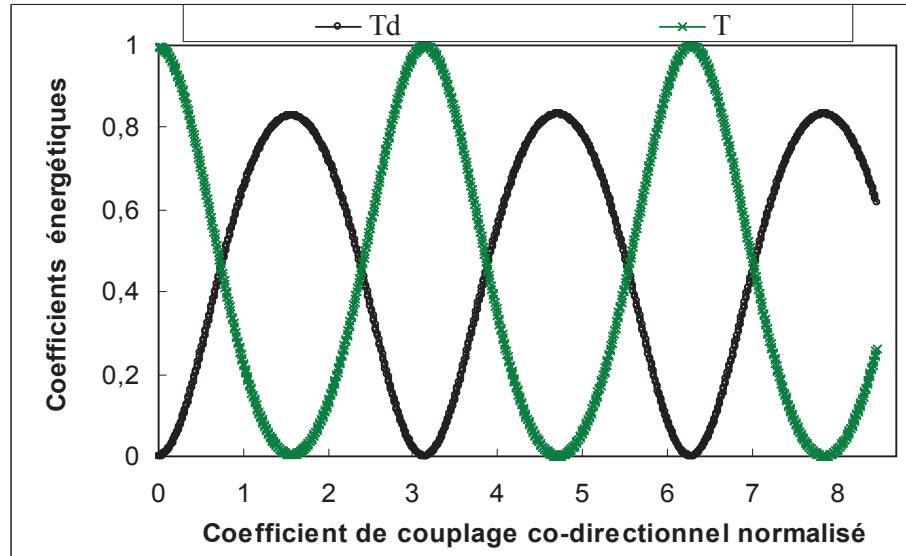


Fig. II.12 : Coefficients de diffraction T_d et de transmission T en fonction du coefficient de couplage co-directionnel normalisé $\chi_s L$.

Nous présentons sur la même figure II.12 la variation du coefficient de diffraction T_d et celle du coefficient de transmission T , en fonction de $\chi_s L$ (cas TE). Bien entendu, lorsqu'il n'y a aucune modulation de la partie réelle de la permittivité diélectrique, le coefficient de couplage normalisé s'annule ($\chi_s L = 0$), et le coefficient de diffraction est nul, auquel cas le coefficient de transmission énergétique est à son maximum.

Les valeurs de ce coefficient maximisant la diffraction (multiples impairs de $\chi_s L = \pi/2$) correspondent à un désaccord de phase co-directionnel nul. De manière générale, avec un tel comportement, une forte valeur du coefficient de couplage n'est pas une garantie d'obtention d'un fort coefficient de diffraction. Ainsi, les multiples pairs de $\chi_s L = \pi/2$ annulent l'efficacité de diffraction de l'H1D.

Ce résultat obtenu par un calcul tout-analytique intégral est nouveau par rapport aux travaux précédents théorique effectués sur des structures uni-dimensionnelles diffractives [Massenot 06], [He 08].

C. ÉPAISSEUR DE L'HOLOGRAMME 1D

Pour cette simulation, on fait varier l'épaisseur L de l'hologramme en maintenant constants tous les autres paramètres. On continue à se placer à proximité de l'angle de Bragg.

$\lambda_0 = 0,632 \text{ } \mu\text{m}$	$\varepsilon'_m = 2,25$ $n_m = 1,5$	$n_0 = 1$ $n_2 = 1$	$\varepsilon''_m = 0$	$\varepsilon'_{1x} = 0,02$
$\varepsilon''_{1x} = 0$	$1 \text{ } \mu\text{m} \leq L \leq 400 \text{ } \mu\text{m}$ (pas = $1 \text{ } \mu\text{m}$)	$\psi''_x = 20^\circ$	$\theta_{R_0}^+ = 18,36^\circ$	$\Lambda_x = 1 \text{ } \mu\text{m}$

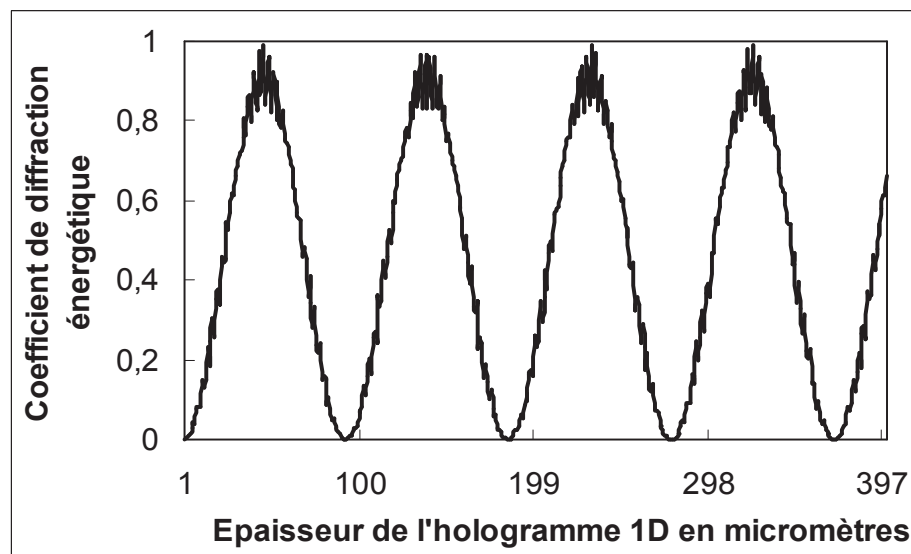


Fig. II.13 : Coefficient de diffraction en fonction de l'épaisseur L de l'H1D

On remarque sur cette figure une variation périodique du coefficient de diffraction avec la variation de l'épaisseur L de l'hologramme 1D, ce qui est logique, puisque au bout du compte, c'est le terme $\chi_s L$ qui gouverne la qualité de l'échange entre ondes réfractée et diffractée dans l'hologramme. Afin de favoriser cette dernière, il faut donc jouer soit sur la valeur de χ_s à travers celle de l'amplitude de modulation de la partie réelle de la permittivité diélectrique, comme nous l'avons vu plus haut, soit sur celle de L .

Nous constatons d'après ce résultat, qu'il ne suffit pas d'une grande épaisseur de l'hologramme 1D pour avoir un gain en efficacité de diffraction, à la différence d'un résultat tiré d'une thèse précédente sur le cristal photonique 1D [He 08]. Il faudra donc bien choisir cette épaisseur L de l'hologramme 1D pour avoir une forte efficacité de diffraction.

D. PÉRIODE SPATIALE DE L'HOLOGRAMME 1D

Pour cette simulation, on fait varier la période spatiale Λ_x de la modulation de la partie réelle de permittivité diélectrique de l'hologramme en maintenant constants tous les autres paramètres. On se maintient à nouveau autour de l'angle d'incidence de Bragg.

$\lambda_0 = 0,632 \text{ } \mu\text{m}$	$\varepsilon'_m = 2,25$ $n_m = 1,5$	$n_0 = 1$ $n_2 = 1$	$\varepsilon''_m = 0$	$\varepsilon'_{lx} = 0,02$
$\varepsilon''_{lx} = 0$	$L = 50 \text{ } \mu\text{m}$	$\psi''_x = 20^\circ$	$\theta_{R_0}^+ = 18,36^\circ$	$0,5 \text{ } \mu\text{m} \leq \Lambda_x \leq 2 \text{ } \mu\text{m}$ (pas = 0,001 μm)

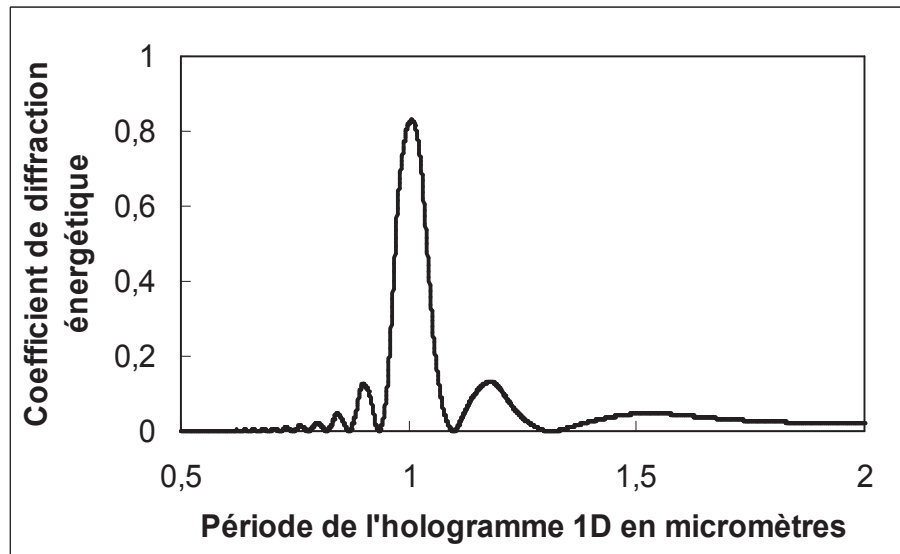


Fig. II.14 : Coefficient de diffraction en fonction de la période de modulation Λ_x

On observe sur cette figure que le coefficient de diffraction présente une valeur maximale pour une certaine période qui vaut 1 μm , qui est celle qui correspond un angle d'incidence exactement égal à l'angle de Bragg compte-tenu des valeurs choisies pour les paramètres fixes :

$$\Lambda_x = \frac{\lambda_0}{2 n_0 \sin(\theta_{R_0}^+)} = 1 \text{ } \mu\text{m} \quad (\text{II.129})$$

Ce résultat est en accord avec la littérature [Kogelnik 69] [Mallick 90]. Nous nous attendons bien évidemment à ce que l'on observe une forte efficacité de diffraction pour une période spatiale, elle-même obtenue lorsque la condition de Bragg est satisfaite.

E. PARTIE IMAGINAIRE DE LA PERMITTIVITÉ MOYENNE DU MILIEU

Pour cette simulation, on fait varier la partie imaginaire ε''_m de la permittivité diélectrique complexe moyenne de l'hologramme. Ce paramètre traduit les pertes (ou l'éventuel gain intrinsèque) du milieu holographique.

$\lambda_0 = 0,632 \text{ } \mu\text{m}$	$\varepsilon'_m = 2,25$ $n_m = 1,5$	$n_0 = 1$ $n_2 = 1$	$-0,09 \leq \varepsilon''_m \leq 0,09$ (pas = 0,0001)	$\varepsilon'_{lx} = 0,02$
$\varepsilon''_{lx} = 0$	$L = 50 \text{ } \mu\text{m}$	$\psi''_x = 20^\circ$	$\theta_{R_0}^+ = 18,36^\circ$	$\Lambda_x = 1 \text{ } \mu\text{m}$

On remarque sur ce graphe que le coefficient de diffraction d'une onde de référence incidente sur l'hologramme passe par un maximum lorsque ε''_m possède une valeur positive comprise entre 0,01 et 0,03. La valeur maximale du coefficient de diffraction vaut 5. Bien entendu, il n'y a pas ici conservation de l'énergie de l'onde optique incidente, et T_d peut excéder l'unité.

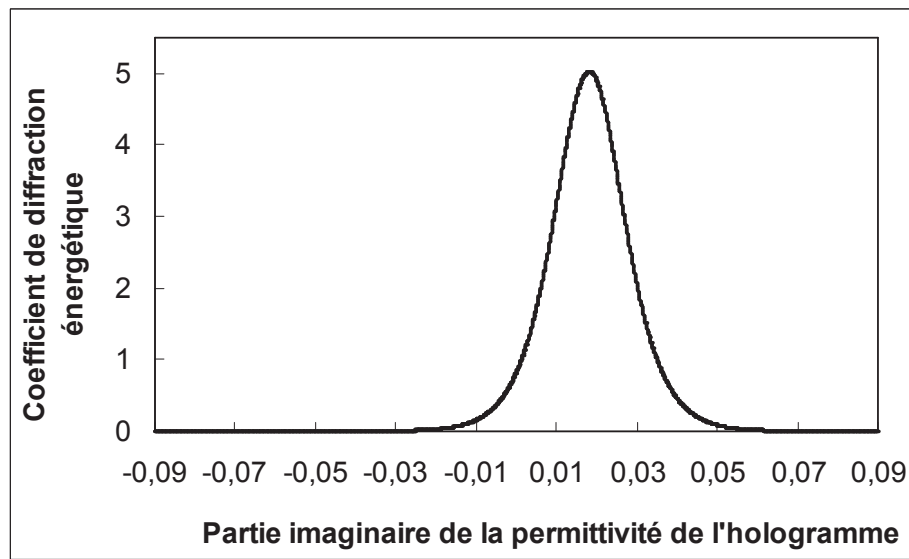


Fig. II.15 : Coefficient de diffraction en fonction de la partie imaginaire ε''_m de la permittivité complexe moyenne de l'hologramme 1D

En effet, la partie imaginaire de la permittivité complexe de l'hologramme intervient dans le coefficient α d'absorption ou de gain du milieu holographique, à travers les termes exponentiels suivants :

$$\exp(\alpha L) \text{ et } \exp(-\alpha L). \quad (\text{II.130})$$

Lorsque $\varepsilon''_m > 0$, on obtient $\alpha > 0$, et le milieu holographique possède du gain. L'onde optique de référence incidente sur l'hologramme, et l'onde diffractée qui en résulte, bénéficient donc de cette amplification. En revanche si $\varepsilon''_m < 0$, on obtient $\alpha < 0$ et le milieu holographique est à pertes. Le maximum observé sur le graphe de la figure II.15 correspond à un compromis idéal entre les impacts respectifs des termes exponentiels (II.130) dans l'expression de T_d .

F. PARTIE RÉELLE DE LA MODULATION DE LA PERMITTIVITÉ

Pour cette simulation, on fait varier l'amplitude réelle ε'_{1x} de la modulation de la permittivité diélectrique de l'hologramme en maintenant constants tous les autres paramètres. On étudie l'évolution du coefficient de diffraction d'une onde de référence incidente sur l'hologramme avec un angle d'incidence proche de l'angle de Bragg.

$\lambda_0 = 0,632 \text{ } \mu\text{m}$	$\varepsilon'_m = 2,25$ $n_m = 1,5$	$n_0 = 1$ $n_2 = 1$	$\varepsilon''_m = 0$	$0 \leq \varepsilon'_{1x} \leq 0,1$ (pas = 0,0001)
$\varepsilon''_{1x} = 0$	$L = 50 \text{ } \mu\text{m}$	$\psi''_x = 20^\circ$	$\theta_{R_0}^+ = 18,36^\circ$	$\Lambda_x = 1 \text{ } \mu\text{m}$

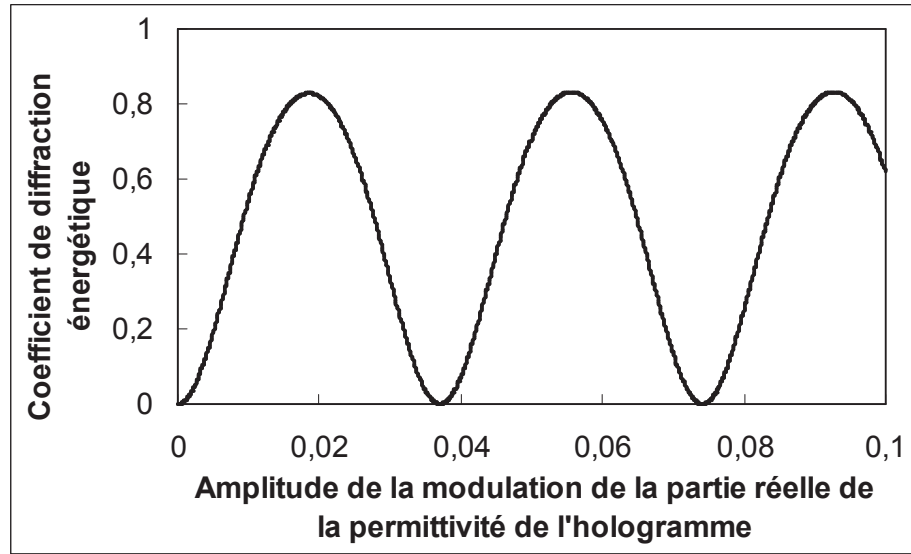


Fig. II.16 : Coefficient de diffraction en fonction de l'amplitude de modulation ε'_{1x} de la partie réelle de la permittivité de l'hologramme 1D

On constate ici une variation périodique similaire à celle obtenue lorsque l'on fait varier le coefficient de couplage normalisé $\chi_s L$, ce qui est à attendre, étant donné que ce dernier est proportionnel à ε'_{1x} . C'est ainsi que lorsque l'amplitude de modulation tend vers 0, l'hologramme s'estompe et l'efficacité de diffraction s'annule.

Dans cette simulation, on en déduit que nous n'avons pas besoin d'une forte amplitude de modulation de la partie réelle de permittivité diélectrique, pour obtenir une forte efficacité de diffraction. En revanche il faut que cette amplitude soit bien choisie de telle sorte que le coefficient de couplage normalisé $\chi_s L$, proportionnel à cette amplitude, soit un multiple impair de $\pi/2$ ($\chi_s L \approx (2p + 1)\pi/2$) où p est un nombre entier positif.

G. PARTIE IMAGINAIRE DE LA MODULATION DE LA PERMITTIVITÉ

Pour cette simulation, on fait varier l'amplitude imaginaire ε''_{1x} de la modulation de permittivité diélectrique de l'hologramme en maintenant constants tous les autres paramètres.

$\lambda_0 = 0,632 \mu m$	$\varepsilon'_m = 2,25$ $n_m = 1,5$	$n_0 = 1$ $n_2 = 1$	$\varepsilon''_m = 0$	$\varepsilon'_{1x} = 0,02$
$-0,009 \leq \varepsilon''_{1x} \leq 0,009$ (pas = 0,0001)	$L = 50 \mu m$	$\psi''_x = 20^\circ$	$\theta_{R_0}^+ = 18,36^\circ$	$\Lambda_x = 1 \mu m$

On remarque ici que le coefficient de diffraction croît régulièrement avec l'amplitude de la modulation de la partie imaginaire de permittivité, pour des valeurs ici comprises entre $-0,009$ et $0,009$ (Figure II.17).

Le paramètre ε''_{1x} gouverne une contribution périodique de pertes ou de gain qui vient se superposer à un éventuel terme de pertes ou de gain moyen du milieu holographique. Le graphe est cohérent avec le fait que l'efficacité de diffraction, même à la condition de Bragg, est atténuée en présence de pertes, et au contraire exaltée en présence de gain.

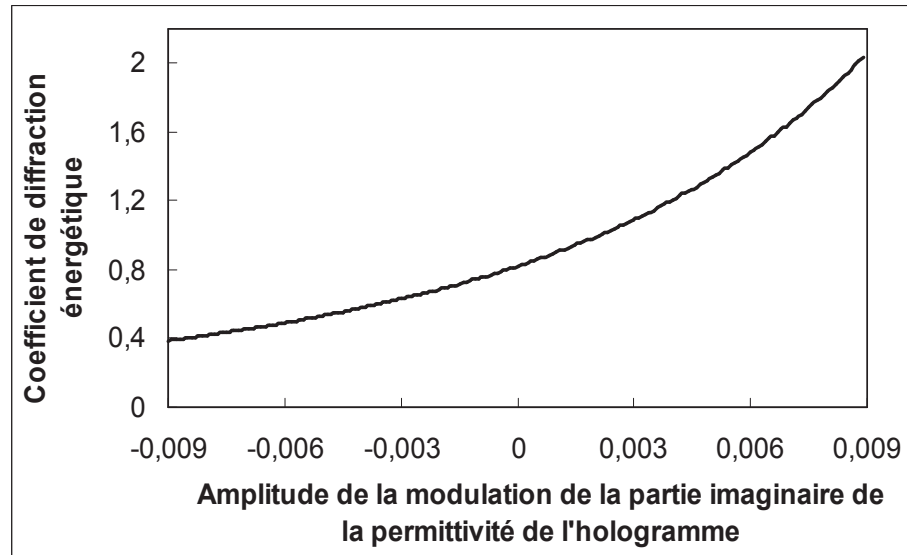


Fig. II.17 : Coefficient de diffraction en fonction de l'amplitude ε''_{1x} de la modulation de la partie imaginaire de la permittivité de l'hologramme 1D

H. DÉPHASAGE ENTRE MODULATIONS RÉELLE ET IMAGINAIRE

Pour cette simulation, on fait varier le déphasage ψ''_{1x} entre les parties réelle et imaginaire de l'amplitude de modulation de la permittivité diélectrique du milieu holographique.

$\lambda_0 = 0,632 \text{ } \mu\text{m}$	$\varepsilon'_m = 2,25$ $n_m = 1,5$	$n_0 = 1,5$ $n_2 = 1,5$	$\varepsilon''_m = 0$ $\alpha = 0$	$\varepsilon'_{1x} = 0,02$
$\varepsilon''_{1x} = 0,02$	$L = 50 \text{ } \mu\text{m}$	$0^\circ \leq \psi''_x \leq 12^\circ$ (pas = $0,1^\circ$)	$\theta_{R_0}^+ = 12,1614^\circ$	$\Lambda_x = 1 \text{ } \mu\text{m}$

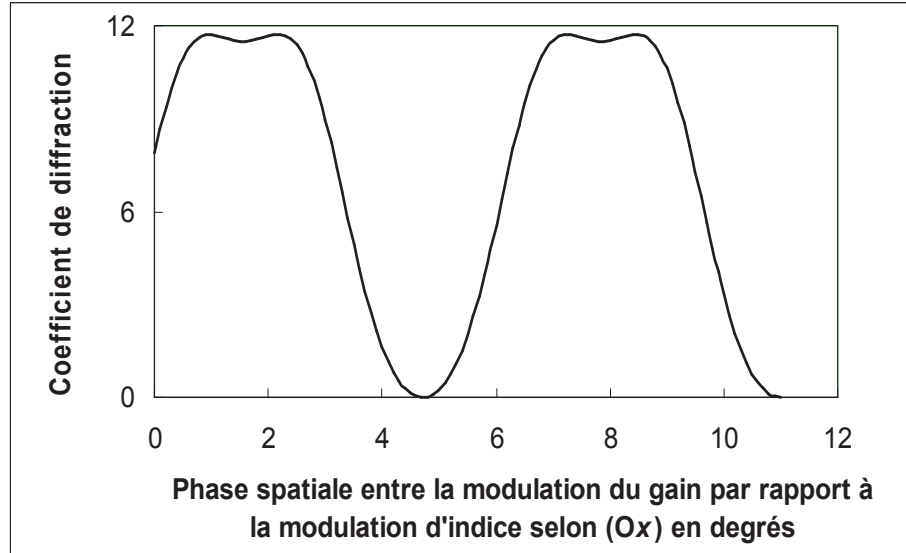


Fig. II.18 : Coefficient de diffraction en fonction du déphasage ψ''_{1x} entre les parties réelle et imaginaire de la modulation de permittivité de l'hologramme 1D

L'impact de ce paramètre a pour effet de décaler spatialement, l'une par rapport à l'autre, la modulation d'indice (partie réelle ε'_{1x}) et la modulation de gain ou de pertes (partie imaginaire ε''_{1x}). Les effets croisés de ces deux contributions peuvent ainsi se renforcer l'un l'autre ou au contraire réduire l'efficacité de diffraction de l'H1D, à travers une alternance d'interférences partiellement constructives ou destructives. Comme ces deux termes ont de même valeur d'amplitudes, de même ordre de grandeur, on parvient à réduire considérablement, voire annuler, l'efficacité de diffraction de l'H1D, même à la condition de Bragg.

V. CONCLUSIONS : VERS L'HOLOGRAMME 2D

Nous avons développé dans ce chapitre une méthode tout-analytique à couplages d'ondes intégrales permettant de décrire la réponse optique d'un hologramme unidimensionnel (H1D) délimité par deux interfaces diélectriques. Nous avons montré que quatre ondes se propagent dans la structure, qui interagissent en permanence en échangeant de l'énergie. Pour les deux états fondamentaux de polarisation TE et TM, nous avons établi la matrice de transfert globale de l'H1D sans passer par un découpage de la structure en sous-couches empilées. De cette matrice de transfert, nous avons déduit les expressions analytiques de quatre coefficients de répartition énergétique.

Une étude graphique des résultats obtenus a montré qu'essentiellement, l'efficacité de diffraction de la structure, lorsqu'elle est assurée par la vérification de la condition angulaire de Bragg, dépend pour l'essentiel d'un coefficient de couplage co-directionnel normalisé χL , qui

traduit l'échange d'énergie entre ondes co-propagatives. Par le biais des divers paramètres structurels et/ou expérimentaux, on peut obtenir un transfert complet de l'énergie introduite dans la structure vers le faisceau diffracté. Pour ce faire, il faut jouer sur ce jeu de paramètres afin d'obtenir une valeur de χL égale à $\pi/2$. On retrouve ainsi le comportement d'un réseau de diffraction en transmission tel que présenté au chapitre précédent, à ceci près que l'H1D, avec ses interfaces, donne également naissance à une onde réfléchie et à une onde rétrodiffractée, qui, au moins pour la seconde, viennent puiser une partie de l'énergie diffractée : on n'obtient donc pas une efficacité de diffraction idéale, égale à 1, car quand la condition de Bragg est vérifiée, elle favorise l'onde diffractée mais aussi, bien que dans un moindre degré, l'onde rétrodiffractée.

Le chapitre suivant va s'intéresser à une généralisation de l'approche développée dans ce premier chapitre. Cette fois-ci, nous allons considérer un double réseau croisé de modulation, et tenter d'en faire une étude tout-analytique, d'un seul bloc. Les calculs, nous allons le voir, sont plus laborieux, mais au-delà de la technique mathématique, nous allons montrer que l'approche couplonique reste valide même pour un cristal photonique bidimensionnel.

CHAPITRE III

MODELISATION D'UN HOLOGRAMME BIIDIMENSIONNEL PASSIF

I. INTRODUCTION

Au cours du chapitre précédent, nous avons posé les bases d'une méthodologie de modélisation tout-analytique perturbative d'une structure diffractive unidimensionnelle s'appuyant notamment sur le formalisme des ondes couplées et celui des matrices de transfert. Dans ce chapitre, nous entendons démontrer que cette même approche peut être étendue à une structure diffractive bidimensionnelle, et qu'elle permet, là encore, de décrire entièrement la réponse d'une telle structure par un jeu de quelques paramètres normalisés.

La structure générique que nous étudions maintenant sera dans ce qui suit dénommée « hologramme bidimensionnel » (hologramme 2D, ou encore H2D), et présente la même symétrie parallélépipédique que l'H1D précédemment étudié (Fig. III.1) : dans un référentiel cartésien (Oxyz) dont les axes sont dirigés par le système de vecteurs unitaires $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, elle est à nouveau supposée de dimension infinie selon l'axe (Ox), invariante selon l'axe (Oy), et d'épaisseur finie L selon l'axe (Oz). Le milieu holographique est ici encore supposé linéaire, transparent, isotrope, isolant et non-magnétique.

La structure diffère néanmoins de l'H1D en ce que sa permittivité diélectrique présente une *double inhomogénéité spatiale* — au fond continu $\varepsilon_m = \varepsilon'_m + i\varepsilon''_m$ se superpose maintenant une modulation sinusoïdale bidimensionnelle $\Delta\varepsilon_r$ de faible amplitude, de période spatiale Λ_x dans la direction (Ox) et de période spatiale Λ_z dans la direction (Oz) :

$$\Delta\varepsilon_r(x, z) = \varepsilon'_{1x} \cos(K_x x) + i\varepsilon''_{1x} \cos(K_x x - \psi'_x) + \varepsilon'_{1z} \cos(K_z z - \psi'_z) + i\varepsilon''_{1z} \cos(K_z z - \psi''_z), \quad (\text{III.1})$$

où $K_x = 2\pi/\Lambda_x$ et $K_z = 2\pi/\Lambda_z$ sont les fréquences spatiales associées à la modulation périodique de permittivité, respectivement selon les axes (Ox) et (Oz).

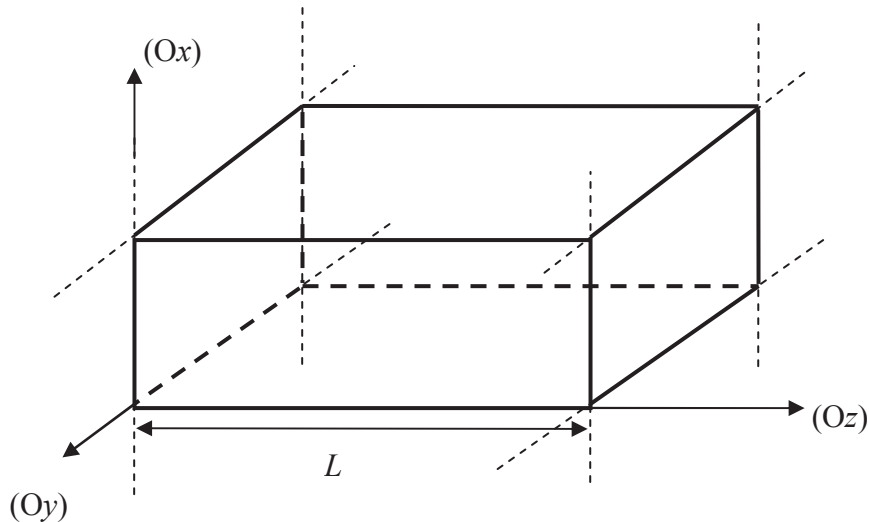


Fig. III.1 : Représentation schématique de la structure de symétrie parallélépipède dont les axes sont dirigés dans le plan (Oxyz)

Les termes ε'_{1x} et ε''_{1x} représentent respectivement, comme dans l'H1D, l'amplitude de la modulation de la partie réelle de la permittivité diélectrique et celle de sa partie imaginaire selon l'axe (Ox), tandis que ε'_{1z} et ε''_{1z} représentent l'amplitude de la modulation de sa partie réelle et celle de sa partie imaginaire selon l'axe (Oz).

Dans le cas le plus général, les modulations d'amplitudes respectives ε'_{1x} et ε''_{1x} peuvent *a priori* être décalées spatialement l'une par rapport à l'autre. Il en est de même des modulations d'amplitudes ε'_{1z} et ε''_{1z} . En outre, les modulations selon (Ox) et (Oz) de la partie réelle de la permittivité ne prennent pas forcément leur origine au même point. Ces considérations justifient l'introduction des termes de phase ψ''_x , ψ'_z et ψ''_z .

Les milieux incident et émergent entourant l'H2D proprement dit sont, eux, à nouveau considérés linéaires, transparents, isotropes, homogènes, isolants et non-magnétiques.

Tout comme pour l'H1D, la modulation de la permittivité diélectrique selon l'axe (Ox) donne naissance à un **réseau (épais) de diffraction en transmission**. Celle selon l'axe (Oz), sur une longueur finie L , constitue ce qu'il est convenu d'appeler un **réseau de diffraction en réflexion distribuée** — structure également connue sous les noms de *réflecteur distribué de Bragg* en Français, *Distributed Bragg Reflector (DBR)* en Anglais, ou encore *miroir de Bragg*. Ainsi, l'H2D consiste en la superposition de deux réseaux de diffraction, l'un en transmission, l'autre en réflexion, et nous allons retrouver dans ce chapitre les spécificités (notamment spectrales et angulaires) propres à ces deux types de structures.

Une telle structure a fait l'objet de précédents travaux de modélisation [He 08a, He 08b, Massenot 06], éventuellement couplés à des mesures expérimentales, mais dans ces travaux, la structure, dans sa dimension (Oz), était subdivisée en couches de faible épaisseur dont la matrice de transfert était estimée — la réponse de l'hologramme tout entier étant obtenue par multiplication matricielle.

Ainsi que nous l'avons vu au chapitre précédent, la spécificité de notre approche est de traiter la structure comme un tout, dans une approche tout-analytique. Comme pour l'H1D, nous déterminons ici la réponse de la structure passive à une onde optique incidente. À nouveau, tous les vecteurs d'onde en présence seront supposés appartenir au plan (xOz) et nous traitons successivement les deux états de polarisation principaux TE (s) et TM (p). Dans l'hypothèse du réseau en transmission épais, nous ne considérons encore, au sein de l'H2D, que quatre ondes mutuellement couplées *via* un système de quatre *équations d'évolution* spatiales. Le passage de ce système à la matrice de transfert de l'H2D est, nous allons le voir, plus complexe que pour l'H1D, mais il est remarquable qu'il mette en jeu, là aussi, un ensemble de quelques paramètres réduits de signification physique immédiate, et mène, après prise en compte des interfaces, à quatre coefficients de répartition énergétiques (de réflexion, transmission, diffraction et rétrodiffraction) dont la dépendance spectrale et angulaire, ainsi que la sensibilité aux caractéristiques géométriques et structurelles de l'H2D, peuvent être étudiées.

II. ÉTUDE TOUT-ANALYTIQUE DE L'HOLOGRAMME 2D

Comme précédemment, commençons par réécrire la permittivité diélectrique relative [Éq. (III.1)] sous la forme suivante :

$$\varepsilon_r(x, z) = \varepsilon'_m + i\varepsilon''_m + \frac{\varepsilon_{1x}}{2} \exp(-i K_x x) + \frac{\tilde{\varepsilon}_{1x}}{2} \exp(i K_x x) + \frac{\varepsilon_{1z}}{2} \exp(-i K_z z) + \frac{\tilde{\varepsilon}_{1z}}{2} \exp(i K_z z), \quad (\text{III.2})$$

où les modulations de permittivité complexes ε_{1x} , $\tilde{\varepsilon}_{1x}$, ε_{1z} et $\tilde{\varepsilon}_{1z}$ sont respectivement définies par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1x} &= \varepsilon'_{1x} + i\varepsilon''_{1x} \exp(i\psi''_x), \\ \tilde{\varepsilon}_{1x} &= \varepsilon'_{1x} + i\varepsilon''_{1x} \exp(-i\psi''_x), \\ \varepsilon_{1z} &= \varepsilon'_{1z} \exp(i\psi'_z) + i\varepsilon''_{1z} \exp(i\psi''_z), \\ \tilde{\varepsilon}_{1z} &= \varepsilon'_{1z} \exp(-i\psi'_z) + i\varepsilon''_{1z} \exp(-i\psi''_z). \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

Le réseau de diffraction en transmission étant supposé épais, nous le traitons à nouveau dans le régime de Bragg et ne considérons qu'un seul ordre de diffraction. Les ondes présentes à l'intérieur de l'hologramme 2D sont au nombre de quatre (deux ondes « R » et deux ondes « S »), leurs champs électriques, leurs vecteurs d'onde et les angles en présence étant dénotés de la même manière que dans l'H1D (Fig. III.2).

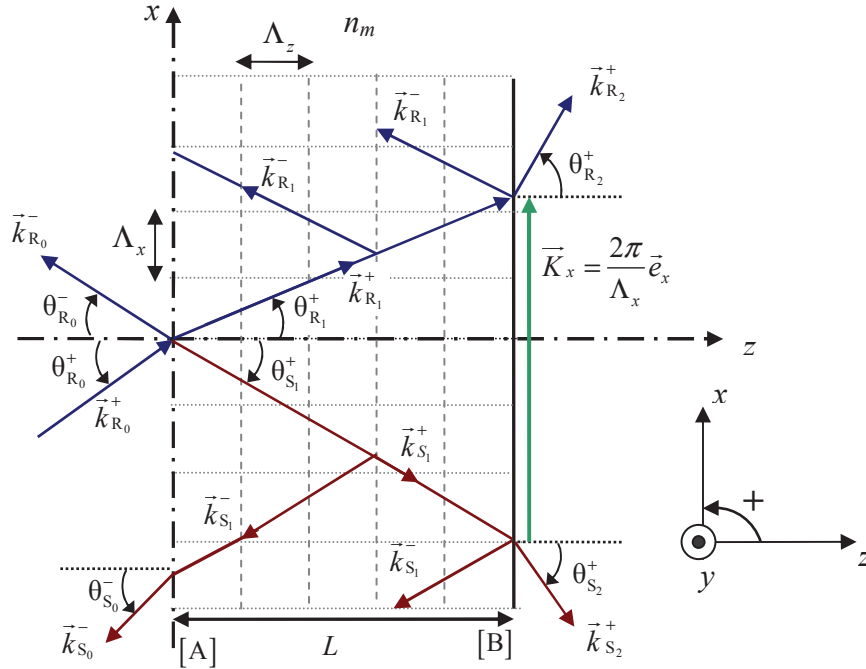


Fig. III.2 : Représentation schématique des ondes en présence dans l'hologramme 2D d'épaisseur \$L\$ et des périodes spatiales \$\Lambda_x\$ selon l'axe \$(Ox)\$ et \$\Lambda_z\$ selon l'axe \$(Oz)\$.

Notons qu'à la différence de ce que l'on observe dans l'hologramme 1D, la réflexion et la rétrodiffraction ne sont pas ici uniquement localisées aux interfaces A et B, mais se produisent aussi

de manière distribuée et continue tout au long de l'épaisseur (de dimension L) de la structure dans la direction (Oz).

Comme dans l'H1D, en revanche, à l'intérieur de l'H2D, les relations de conservation suivantes lient, par l'intermédiaire du vecteur \vec{K}_x caractéristique du réseau en transmission, les vecteurs d'onde $\vec{k}_{R_1}^+$ et $\vec{k}_{S_1}^+$ de l'onde de référence réfractée et de l'onde diffractée, d'une part, et, de manière similaire, les vecteurs d'onde $\vec{k}_{R_1}^-$ et $\vec{k}_{S_1}^-$ de l'onde de référence réfléchie et de l'onde rétrodiffractée, d'autre part :

$$\vec{k}_{R_1}^+ = \vec{k}_{S_1}^+ + \vec{K}_x, \quad (III.4)$$

$$\vec{k}_{R_1}^- = \vec{k}_{S_1}^- + \vec{K}_x. \quad (III.5)$$

Dès lors, les composantes de tous les vecteurs d'onde en présence sont identiques à celles définies au chapitre II pour l'hologramme 1D.

II.1. OPERATEUR D'EVOLUTION ET PARAMETRES COUPLONIQUES

II.1.1. CAS DE LA POLARISATION INCIDENTE TE

La figure III.3 ci-dessous reprend la géométrie de l'hologramme proprement dit (ici, l'H2D), avec ses quatre ondes en présence, dont les champs électriques sont, en polarisation TE, colinéaires et dirigés selon l'axe (Oy).

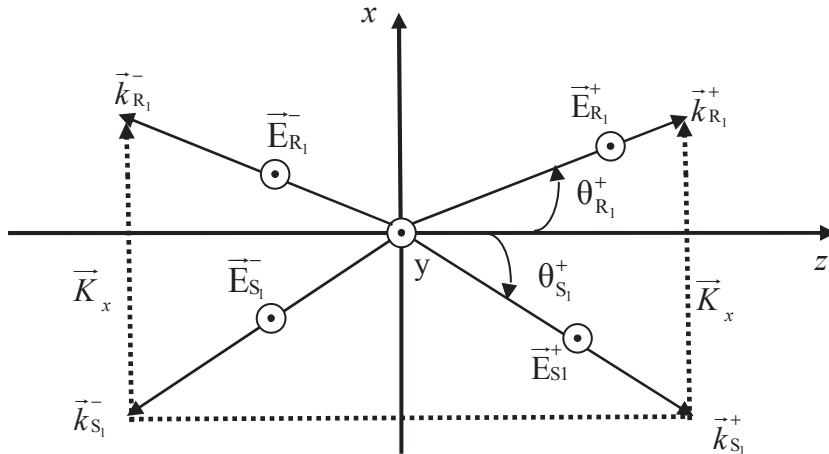


Fig. III.3 : Géométrie des ondes en présence dans l'hologramme 2D en polarisation TE

Les quatre champs en présence sont conformes au type de solution de l'équation de propagation retenu précédemment, avec :

$$\vec{E}_{R_1}^+(\vec{r}, t) = R^+(z) \exp\left[i(\omega t - \vec{k}_{R_1}^+ \cdot \vec{r})\right] \vec{e}_y, \quad (\text{III.6.a})$$

$$\vec{E}_{R_1}^-(\vec{r}, t) = R^-(z) \exp\left[i(\omega t - \vec{k}_{R_1}^- \cdot \vec{r})\right] \vec{e}_y, \quad (\text{III.6.b})$$

$$\vec{E}_{S_1}^+(\vec{r}, t) = S^+(z) \exp\left[i(\omega t - \vec{k}_{S_1}^+ \cdot \vec{r})\right] \vec{e}_y, \quad (\text{III.6.c})$$

$$\vec{E}_{S_1}^-(\vec{r}, t) = S^-(z) \exp\left[i(\omega t - \vec{k}_{S_1}^- \cdot \vec{r})\right] \vec{e}_y, \quad (\text{III.6.d})$$

et le champ électrique total à l'intérieur de l'H2D s'écrit donc à nouveau :

$$\begin{aligned} \vec{E}_T(\vec{r}, t) &= E_T(\vec{r}, t) \vec{e}_y = \vec{E}_{R_1}^+(\vec{r}, t) + \vec{E}_{R_1}^-(\vec{r}, t) + \vec{E}_{S_1}^+(\vec{r}, t) + \vec{E}_{S_1}^-(\vec{r}, t) \\ &= \left[R^+(z) e^{-i\vec{k}_{R_1}^+ \cdot \vec{r}} + R^-(z) e^{-i\vec{k}_{R_1}^- \cdot \vec{r}} + S^+(z) e^{-i\vec{k}_{S_1}^+ \cdot \vec{r}} + S^-(z) e^{-i\vec{k}_{S_1}^- \cdot \vec{r}} \right] e^{i\omega t} \vec{e}_y, \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

et vérifie l'équation de propagation qui, en polarisation TE, prend la forme simple d'une équation de Helmholtz scalaire :

$$\Delta E_T(\vec{r}, t) + k_0^2 \varepsilon_r(x, z) E_T(\vec{r}, t) = \frac{\partial^2 E_T(\vec{r}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_T(\vec{r}, t)}{\partial z^2} + k_0^2 \varepsilon_r(x, z) E_T(\vec{r}, t) = 0. \quad (\text{III.8})$$

Le report de l'expression du champ total et de celle de la permittivité diélectrique relative modulée dans cette équation de propagation mène à une équation différentielle du second ordre qui, par regroupement et identification des termes de mêmes fréquences spatiales, se ramène à un système de quatre équations différentielles linéaires du second ordre couplées portant sur les enveloppes lentement variables R^+ , R^- , S^+ et S^- :

$$\left[\frac{d^2 R^+(z)}{dz^2} - 2i\beta_1 \frac{dR^+(z)}{dz} + \left\{ -(\gamma_x^2 + \beta_1^2) + k_0^2 \varepsilon_m \right\} R^+(z) + k_0^2 \left\{ \frac{\varepsilon_{1x}}{2} S^+(z) + \frac{\varepsilon_{1z}}{2} \exp(2i\delta z) R^-(z) \right\} \right] \times \exp[-i(\gamma_x x + \beta_1 z)] = 0 \quad (\text{III.9})$$

$$\left[\frac{d^2 R^-(z)}{dz^2} + 2i\beta_1 \frac{dR^-(z)}{dz} + \left\{ -(\gamma_x^2 + \beta_1^2) + k_0^2 \varepsilon_m \right\} R^-(z) + k_0^2 \left\{ \frac{\varepsilon_{1x}}{2} S^-(z) + \frac{\tilde{\varepsilon}_{1z}}{2} \exp(-2i\delta z) R^+(z) \right\} \right] \times \exp[-i(\gamma_x x - \beta_1 z)] = 0, \quad (\text{III.10})$$

$$\left[\frac{d^2 S^+(z)}{dz^2} - 2i\beta_1 \frac{dS^+(z)}{dz} - \left\{ (\gamma_x - K_x)^2 + \beta_1^2 \right\} S^+(z) + k_0^2 \left\{ \varepsilon_m S^+(z) + \frac{\tilde{\varepsilon}_{1x}}{2} R^+(z) + \frac{\varepsilon_{1z}}{2} \exp(2i\delta z) S^-(z) \right\} \right] \times \exp[-i((\gamma_x - K_x)x + \beta_1 z)] = 0, \quad (\text{III.11})$$

$$\left[\frac{d^2 S^-(z)}{dz^2} + 2i\beta_1 \frac{dS^-(z)}{dz} - \left\{ (\gamma_x - K_x)^2 - \beta_1^2 \right\} S^-(z) + k_0^2 \left\{ \varepsilon_m S^-(z) + \frac{\tilde{\varepsilon}_{1x}}{2} R^-(z) + \frac{\tilde{\varepsilon}_{1z}}{2} \exp(2i\delta z) S^+(z) \right\} \right] \times \exp[-i((\gamma_x - K_x)x - \beta_1 z)] = 0. \quad (\text{III.12})$$

Une caractéristique saillante de ce système d'équations, en comparaison de celui obtenu pour l'H1D, est la présence des termes en $\exp(\pm 2i\delta z)$, le coefficient δ étant défini par :

$$\delta = \beta_1 - \beta_B = \beta_1 - \frac{\pi}{\Lambda_z}, \quad (\text{III.13})$$

où $\beta_B = \pi/\Lambda_z$ est le *vecteur de Bragg* caractéristique du réseau de diffraction en réflexion distribuée (DBR). Le coefficient δ traduit, on le verra, un *écart à la condition de Bragg* des composantes selon (Oz) des vecteurs d'onde en présence dans l'H2D. On peut le qualifier aussi de « **désaccord de phase contra-directionnel** » car le réseau en réflexion, dans l'H2D, donne naissance à des ondes contra-propagatives par rapport à la direction d'incidence — ceci par contraste avec le « *désaccord de phase co-directionnel* » Δ de l'H1D « nu » (c'est-à-dire hors interfaces), où le réseau en transmission donne naissance à une onde « S » diffractée de même sens de propagation que l'onde « R » incidente

Rappelons que $\epsilon_m = \epsilon'_m + i\epsilon''_m$ est ici le fond continu de permittivité diélectrique relative du milieu holographique, dont la partie réelle vérifie $k_{R_1}^{+2} = k_{R_1}^{-2} = k_0^2 \epsilon'_m = \gamma_x^2 + \beta_1^2$, ce qui annule le terme $-(\gamma_x^2 + \beta^2) + k_0^2 \epsilon'_m$ dans chacune de ces quatre équations. Par ailleurs, dans le cadre de l'approximation des enveloppes lentement variables, nous sommes à nouveau amenés à négliger les dérivées secondes de ces dernières.

Dès lors, le système d'équations (III.9)–(III.12) constitue un système de quatre équations différentielles du premier ordre, ou *équations d'évolution* spatiale des enveloppes lentement variables des champs, que l'on peut, comme pour l'H1D, écrire sous forme matricielle :

$$i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} R^+ \\ R^- \\ S^+ \\ S^- \end{pmatrix} = \frac{1}{2\beta_1} \begin{pmatrix} k_0^2 i \epsilon''_m & k_0^2 \frac{\epsilon_{1z}}{2} e^{2i\delta z} & k_0^2 \frac{\epsilon_{1x}}{2} & 0 \\ -k_0^2 \frac{\tilde{\epsilon}_{1z}}{2} e^{-2i\delta z} & -k_0^2 i \epsilon''_m & 0 & -k_0^2 \frac{\epsilon_{1x}}{2} \\ k_0^2 \frac{\tilde{\epsilon}_{1x}}{2} & 0 & -K_x(K_x - 2\gamma_x) + ik_0^2 \epsilon''_m & k_0^2 \frac{\epsilon_{1z}}{2} e^{2i\delta z} \\ 0 & -k_0^2 \frac{\tilde{\epsilon}_{1x}}{2} & -k_0^2 \frac{\tilde{\epsilon}_{1z}}{2} e^{-2i\delta z} & K_x(K_x - 2\gamma_x) - ik_0^2 \epsilon''_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^+ \\ R^- \\ S^+ \\ S^- \end{pmatrix} \quad (\text{III.14})$$

On constate que la matrice d'évolution de l'H2D n'a plus la forme relativement simple, « en damier », de celle de l'H1D [Éq. (II.26)], et que n'y subsistent des zéros que sur la diagonale secondaire.

Huit des éléments non-nuls de cette matrice sont identiques aux huit éléments qui formaient la matrice d'évolution de l'H1D, et on retrouve ainsi les coefficients antérieurement définis que sont le **coefficient linéique d'absorption ou de gain** α [Éq. (II.27)], le **coefficient de désaccord spectral** (ou de **désaccord de phase co-directionnel**) Δ [Éq. (II.28)], ainsi que les deux **coefficients de couplage co-directionnel** χ_s et $\tilde{\chi}_s$ définis par les Éqs. (II.29) pour des ondes polarisées TE.

Quatre autres éléments sont non-nuls dans cette matrice, et occupent les emplacements d'éléments qui étaient nuls dans la matrice d'évolution de l'H1D. En effet, ces éléments sont de manière évidente spécifiques au réseau en réflexion, leur valeurs étant gouvernées par les paramètres ε_{1z} , $\tilde{\varepsilon}_{1z}$ et δ .

On peut par ailleurs les interpréter en termes de coefficients de couplage, comme nous l'avons fait pour χ_s et $\tilde{\chi}_s$. On vérifie en effet que ces termes traduisent, dans le système d'équations d'évolution, une variation de l'amplitude de l'enveloppe d'une onde (de type « R » ou « S ») se propageant dans le sens croissant de l'axe (Oz) proportionnelle à celle de l'onde de même type se propageant dans le sens décroissant de l'axe. Le coefficient de proportionnalité peut alors être interprété comme un *coefficient de couplage contra-directionnel*, et traduit un échange d'énergie, au cours de la propagation dans l'H2D, entre ondes « R » ou ondes « S » se propageant de concert (R^+ avec R^- , S^+ avec S^-). Selon que l'échange d'énergie se fait au profit d'une onde se propageant vers les z croissants au détriment de son homologue se propageant vers les z décroissants, ou bien l'inverse, on voit apparaître deux tels **coefficients de couplage contra-directionnel**, définis par :

$$\kappa_s = \frac{k_0^2 \varepsilon_{1z}}{4\beta_1}, \quad (\text{III.15a})$$

$$\tilde{\kappa}_s = \frac{k_0^2 \tilde{\varepsilon}_{1z}}{4\beta_1}. \quad (\text{III.15b})$$

Comme précédemment, ces coefficients sont indicés « s » en référence à l'état de polarisation TE (ou s) que nous considérons ici, et comme précédemment, nous établirons que leurs homologues, en polarisation TM (ou p), prennent des formes légèrement modifiées. Ces coefficients de couplage contra-directionnel sont proportionnels aux amplitudes des parties réelle et imaginaire de la modulation de permittivité diélectrique responsable de la rétroaction distribuée des ondes dans l'H2D. On constate immédiatement qu'en l'absence d'une telle modulation, donc en l'absence de DBR dans la structure « nue » (hors interfaces), aucune onde se propageant vers les z décroissants ne serait créée au cours de la propagation de l'onde « R » injectée vers les z croissants en $z = 0$.

Le système d'équations d'évolution prend alors la forme condensée suivante :

$$i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} R^+ \\ R^- \\ S^+ \\ S^- \end{pmatrix} = [K_s] \begin{pmatrix} R^+ \\ R^- \\ S^+ \\ S^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\alpha & \kappa_s e^{2i\delta z} & \chi_s & 0 \\ -\tilde{\kappa}_s e^{-2i\delta z} & -i\alpha & 0 & -\chi_s \\ \tilde{\chi}_s & 0 & i\alpha - 2\Delta & \kappa_s e^{2i\delta z} \\ 0 & -\tilde{\chi}_s & -\tilde{\kappa}_s e^{-2i\delta z} & -(i\alpha - 2\Delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^+ \\ R^- \\ S^+ \\ S^- \end{pmatrix}, \quad (\text{III.16})$$

où $[K_s]$ est l'opérateur d'évolution du système en polarisation TE (s), matrice (4×4) s'exprimant, comme pour l'H1D, en fonctions de paramètres que nous qualifions à nouveau de couploniques.

Sur le modèle de la procédure suivie au chapitre précédent, il est utile de symétriser cet opérateur. Mais *surtout*, il s'agit de le rendre indépendant de la variable z , car on constate que les

termes de couplage contra-directionnel sont affectés de termes de phase dépendants de l'abscisse z qui traduisent l'importance des phases relatives des ondes contra-propagatives lorsqu'elles échangent de l'énergie dans l'épaisseur du DBR de dimension L finie — et en particulier de leur écart à la *condition de Bragg* $\delta=0$ que nous discuterons plus loin.

Pour ce faire, un déphasage judicieux des enveloppes lentement variables des champs électriques est ici le suivant :

$$R^+(z) = A(z) \exp(i\delta z), \quad (\text{III.17a})$$

$$R^-(z) = B(z) \exp(-i\delta z), \quad (\text{III.17b})$$

$$S^+(z) = C(z) \exp(i\delta z), \quad (\text{III.17c})$$

$$S^-(z) = D(z) \exp(-i\delta z). \quad (\text{III.17d})$$

En introduisant par ailleurs les coefficients mixtes δ_1 et δ_2 définis par :

$$\delta_1 = \delta + i\alpha, \quad (\text{III.18a})$$

$$\delta_2 = \delta_1 - 2\Delta = \delta - 2\Delta + i\alpha, \quad (\text{III.18b})$$

on parvient à un système d'équations d'évolution, portant sur les enveloppes déphasées A , B , C et D , qui s'écrit à l'aide d'un opérateur d'évolution $[K]$ symétrisé et indépendant de z , avec :

$$i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = [K] \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 & \kappa_s & \chi_s & 0 \\ -\tilde{\kappa}_s & -\delta_1 & 0 & -\chi_s \\ \tilde{\chi}_s & 0 & \delta_2 & \kappa_s \\ 0 & -\tilde{\chi}_s & -\tilde{\kappa}_s & -\delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}. \quad (\text{III.19})$$

On constate immédiatement que cet opérateur d'évolution n'est pas aussi simple que celui de l'H1D, et qu'il fait apparaître plus de coefficients couploniques, ces paramètres physiques qui gouvernent la réponse de la structure.

La cohérence de notre modèle apparaît cependant clairement par passage à la limite, par lequel on montre que l'H1D n'est qu'un cas particulier de l'H2D. Lorsque en effet l'on fait tendre vers zéro les amplitudes complexes de modulation de la permittivité selon (Oz), ε_{1z} et $\tilde{\varepsilon}_{1z}$: si $\varepsilon_{1z} \rightarrow 0$ et $\tilde{\varepsilon}_{1z} \rightarrow 0$, alors $\kappa_s \rightarrow 0$ et $\tilde{\kappa}_s \rightarrow 0$ et l'opérateur d'évolution (4×4) peut être ramené à deux sous-opérateurs (2×2), avec :

$$i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 & \chi_s \\ \tilde{\chi}_s & \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta_1 & -\chi_s \\ -\tilde{\chi}_s & -\delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}. \quad (\text{III.20})$$

En posant alors $\tau = \delta - \Delta$ et en introduisant les amplitudes déphasées suivantes :

$$A = A_0 \exp(-i\tau z), \quad B = B_0 \exp(i\tau z), \quad C = C_0 \exp(-i\tau z), \quad \text{et} \quad D = D_0 \exp(i\tau z), \quad (\text{III.21})$$

on obtient un jeu de deux sous-opérateur d'évolution de la forme :

$$i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} A_0 \\ C_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & \chi_s \\ \tilde{\chi}_s & -\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ C_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} B_0 \\ D_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta & -\chi_s \\ -\tilde{\chi}_s & \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ D_0 \end{pmatrix}, \quad (\text{III.22})$$

qui n'est autre que celui qui gouverne la réponse de l'H1D.

Un autre cas-limite est obtenu lorsque l'on fait abstraction de la modulation de permittivité selon (Ox), avec $\varepsilon_{1x} \rightarrow 0$ et $\tilde{\varepsilon}_{1x} \rightarrow 0$, ce qui se traduit par une annulation des coefficients de couplage co-directionnel ($\chi_s \rightarrow 0$ et $\tilde{\chi}_s \rightarrow 0$). Le couplage devient alors purement contra-directionnel, et l'opérateur d'évolution résultant est celui d'un miroir de Bragg.

II.1.2. CAS DE LA POLARISATION INCIDENTE TM

La détermination de l'opérateur d'évolution symétrisé en polarisation TM suit le même cheminement qu'en polarisation TE. La géométrie des champs, qui sont coplanaires avec le gradient de permittivité et appartiennent donc tous au plan (xOz), est illustrée sur la Figure III.4.

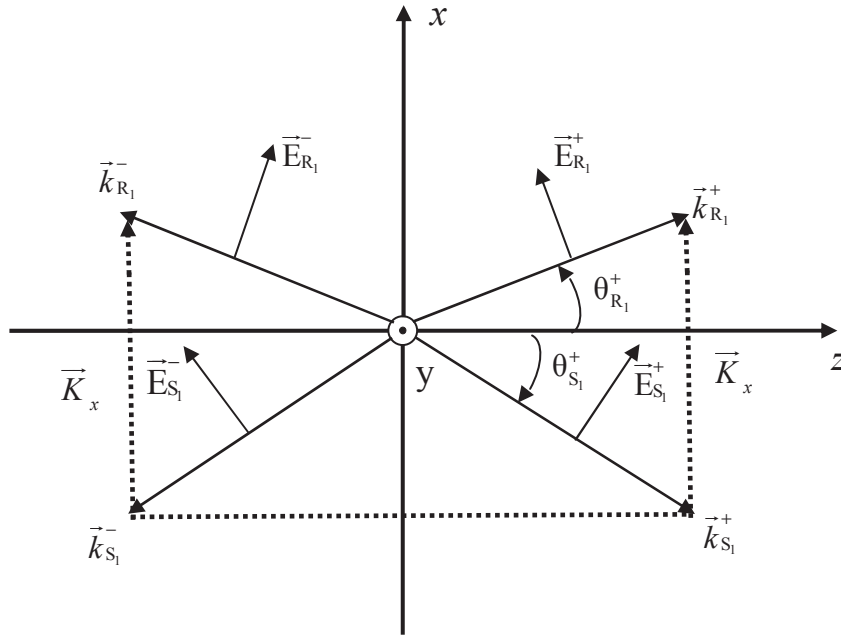


Fig. III.4 : Géométrie des ondes en présence dans l'hologramme 2D en polarisation TM

La forme générique du champ électrique total dans l'H2D, ainsi que celle de l'équation de propagation qu'il doit vérifier, sont évidemment identiques à celles que nous avons obtenues au chapitre précédent dans l'H1D.

Le champ électrique total s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned}\vec{E}_T(\vec{r},t) &= \vec{E}_R^+(\vec{r},t) + \vec{E}_R^-(\vec{r},t) + \vec{E}_S^+(\vec{r},t) + \vec{E}_S^-(\vec{r},t) \\ &= \left[R^+(z) e^{-i\vec{k}_{R_1}^+ \cdot \vec{r}} \vec{e}_{R_1}^+ + R^-(z) e^{-i\vec{k}_{R_1}^- \cdot \vec{r}} \vec{e}_{R_1}^- + S^+(z) e^{-i\vec{k}_{S_1}^+ \cdot \vec{r}} \vec{e}_{S_1}^+ + S^-(z) e^{-i\vec{k}_{S_1}^- \cdot \vec{r}} \vec{e}_{S_1}^- \right] e^{i\omega t},\end{aligned}\quad (\text{III.23})$$

où les composantes des vecteurs directeurs des quatre champs qui le composent sont donnés par les équations (II.39) du chapitre précédent, et il vérifie une équation de propagation vectorielle faisant intervenir les variations spatiales (maintenant *bidimensionnelles*) de permittivité diélectrique, avec :

$$\vec{\Delta} \vec{E}_T - \vec{\text{grad}} \left[\text{div} \vec{E}_T \right] + k_0^2 \epsilon_r(x,z) \frac{\partial^2 \vec{E}_T}{\partial t^2} = \vec{0}. \quad (\text{III.24})$$

En suivant un développement parfaitement identique à celui exposé pour l'H1D en polarisation TM, on montre que pour chacun des 4 champs de forme $\vec{E} = F(z) \exp \left[i \left(\omega t - \vec{k}_F \cdot \vec{r} \right) \right] \vec{e}_F$ qui constituent le champ total, on a :

$$-\vec{\text{grad}} \left[\text{div} \vec{E} \right] = i \left[\frac{\partial F(z)}{\partial z} \left(\vec{e}_F \cdot \vec{e}_z \right) \right] \exp \left[i \left(\omega t - \vec{k}_F \cdot \vec{r} \right) \right] \vec{k}_F, \quad (\text{III.25})$$

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \left[\frac{\partial^2 F(z)}{\partial z^2} - i \left(\vec{k}_F \cdot \vec{e}_z \right) \frac{\partial F(z)}{\partial z} - \|\vec{k}_F\|^2 F(z) \right] \exp \left[i \left(\omega t - \vec{k}_F \cdot \vec{r} \right) \right] \vec{e}_F. \quad (\text{III.26})$$

En appliquant ces expressions à chacun de ces quatre champs, et en reportant celle de la permittivité diélectrique relative modulée $\epsilon_r(x,z)$ dans l'équation de propagation, on obtient, après avoir négligé les dérivées du second ordre, une équation différentielle du premier ordre *vectorielle*. Le reste de la démarche nous est familier : introduire les composantes des vecteurs d'ondes en présence, noter que $-(\gamma_x^2 + \beta_1^2) + k_0^2 \epsilon'_m = 0$, regrouper puis identifier les termes de mêmes fréquences spatiales. Après quelques lignes de calcul, on obtient le système *vectoriel* suivant de quatre équations différentielles linéaires du premier ordre couplées :

$$\left[\begin{aligned} & -2i\beta_1 \frac{dR^+(z)}{dz} \vec{e}_{R_1}^+ + i k_0^2 \epsilon''_m R^+(z) \vec{e}_{R_1}^+ + i \vec{k}_{R_1}^+ \left[\left(\vec{e}_{R_1}^+ \cdot \vec{e}_z \right) \frac{dR^+(z)}{dz} \right] \\ & + k_0^2 \left(\frac{\epsilon_{1x}}{2} S^+(z) \vec{e}_{S_1}^+ + \frac{\epsilon_{1z}}{2} \exp(2i\delta_z) R^-(z) \vec{e}_{R_1}^- \right) \end{aligned} \right] \times \exp[-i(\gamma_x x + \beta_1 z)] = \vec{0}, \quad (\text{III.27})$$

$$\left[\begin{aligned} & 2i\beta_1 \frac{dR^-(z)}{dz} \vec{e}_{R_1}^- + i k_0^2 \epsilon''_m R^-(z) \vec{e}_{R_1}^- + i \vec{k}_{R_1}^- \left[\left(\vec{e}_{R_1}^- \cdot \vec{e}_z \right) \frac{dR^-(z)}{dz} \right] \\ & + k_0^2 \left(\frac{\epsilon_{1x}}{2} S^-(z) \vec{e}_{S_1}^- + \frac{\tilde{\epsilon}_{1z}}{2} \exp(-2i\delta_z) R^+(z) \vec{e}_{R_1}^+ \right) \end{aligned} \right] \times \exp[-i(\gamma_x x - \beta_1 z)] = \vec{0}, \quad (\text{III.28})$$

$$\left[\begin{aligned} & -2i\beta_1 \frac{dS^+(z)}{dz} \vec{e}_{S_1}^+ + \left\{ -K_x (K_x - 2\gamma_x) + ik_0^2 \varepsilon_m'' \right\} S^+(z) \vec{e}_{S_1}^+ \\ & + i\vec{k}_{S_1}^+ \left[\left(\vec{e}_{S_1}^+ \cdot \vec{e}_z \right) \frac{dS^+(z)}{dz} \right] + k_0^2 \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{1x}}{2} R^+(z) \vec{e}_{R_1}^+ + \frac{\varepsilon_{1z}}{2} \exp(2i\delta_z) S^-(z) \vec{e}_{S_1}^- \right) \end{aligned} \right], \quad (\text{III.29})$$

$$\times \exp[-i((\gamma_x - K_x) + \beta_1 z)] = \vec{0}$$

$$\left[\begin{aligned} & 2i\beta_1 \frac{dS^-(z)}{dz} \vec{e}_{S_1}^- + \left\{ -K_x (K_x - 2\gamma_x) + ik_0^2 \varepsilon_m'' \right\} S^-(z) \vec{e}_{S_1}^- + i\vec{k}_{S_1}^- \left[\left(\vec{e}_{S_1}^- \cdot \vec{e}_z \right) \frac{dS^-(z)}{dz} \right] \\ & + k_0^2 \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{1x}}{2} R^-(z) \vec{e}_{R_1}^- + \frac{\tilde{\varepsilon}_{1z}}{2} \exp(-2i\delta_z) S^+(z) \vec{e}_{S_1}^+ \right) \end{aligned} \right]. \quad (\text{III.30})$$

$$\times \exp[-i((\gamma_x - K_x)x - \beta_1 z)] = \vec{0}$$

Quatre équations scalaires suffisant à obtenir l'opérateur d'évolution des enveloppes des champs, on peut, rappelons-le, trouver judicieux de projeter les équations vectorielles (III.27)-(III.30) sur les directions des vecteurs unitaires $\vec{e}_{R_1}^+$, $\vec{e}_{R_1}^-$, $\vec{e}_{S_1}^+$ et $\vec{e}_{S_1}^-$, respectivement, ce qui mène à :

$$\left[\begin{aligned} & -2i\beta_1 \frac{dR^+(z)}{dz} + ik_0^2 \varepsilon_m'' R^+(z) + k_0^2 \left(\frac{\varepsilon_{1x}}{2} S^+(z) (\vec{e}_{R_1}^+ \cdot \vec{e}_{S_1}^+) + \frac{\varepsilon_{1z}}{2} \exp(2i\delta_z) R^-(z) (\vec{e}_{R_1}^+ \cdot \vec{e}_{R_1}^-) \right) \end{aligned} \right], \quad (\text{III.31})$$

$$\times \exp[-i(\gamma_x x + \beta_1 z)] = 0$$

$$\left[\begin{aligned} & 2i\beta_1 \frac{dR^-(z)}{dz} + ik_0^2 \varepsilon_m'' R^-(z) + k_0^2 \left(\frac{\varepsilon_{1x}}{2} S^-(z) (\vec{e}_{R_1}^- \cdot \vec{e}_{S_1}^-) + \frac{\tilde{\varepsilon}_{1z}}{2} \exp(-2i\delta_z) R^+(z) (\vec{e}_{R_1}^- \cdot \vec{e}_{R_1}^+) \right) \end{aligned} \right], \quad (\text{III.32})$$

$$\times \exp[-i(\gamma_x x - \beta_1 z)] = 0$$

$$\left[\begin{aligned} & -2i\beta_1 \frac{dS^+(z)}{dz} + \left\{ -K_x (K_x - 2\gamma_x) + ik_0^2 \varepsilon_m'' \right\} S^+(z) \\ & + k_0^2 \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{1x}}{2} R^+(z) (\vec{e}_{S_1}^+ \cdot \vec{e}_{R_1}^+) + \frac{\varepsilon_{1z}}{2} \exp(2i\delta_z) S^-(z) (\vec{e}_{S_1}^+ \cdot \vec{e}_{S_1}^-) \right) \end{aligned} \right] \times \exp[-i((\gamma_x - K_x) + \beta_1 z)] = 0, \quad (\text{III.33})$$

$$\left[\begin{aligned} & 2i\beta_1 \frac{dS^-(z)}{dz} + \left\{ -K_x (K_x - 2\gamma_x) + ik_0^2 \varepsilon_m'' \right\} S^-(z) \\ & + k_0^2 \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{1x}}{2} R^-(z) (\vec{e}_{S_1}^- \cdot \vec{e}_{R_1}^-) + \frac{\tilde{\varepsilon}_{1z}}{2} \exp(-2i\delta_z) S^+(z) (\vec{e}_{S_1}^- \cdot \vec{e}_{S_1}^+) \right) \end{aligned} \right] \times \exp[-i((\gamma_x - K_x)x - \beta_1 z)] = 0. \quad (\text{III.34})$$

Ce système de quatre équations d'évolution spatiale couplées peut être exprimé, en polarisation TM (p), sous la forme matricielle suivante :

$$i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} R^+ \\ R^- \\ S^+ \\ S^- \end{pmatrix} = [K_p] \begin{pmatrix} R^+ \\ R^- \\ S^+ \\ S^- \end{pmatrix}, \quad (\text{III.35})$$

où l'opérateur d'évolution $[K_p]$ s'écrit (III.36) :

$$[K_p] = \frac{1}{2\beta_1} \begin{pmatrix} i k_0^2 \varepsilon_m'' & k_0^2 \frac{\varepsilon_{1z}}{2} e^{2i\delta z} (\vec{e}_{R_1}^+ \cdot \vec{e}_{R_1}^-) & k_0^2 \frac{\varepsilon_{1x}}{2} (\vec{e}_{R_1}^+ \cdot \vec{e}_{S_1}^+) & 0 \\ -k_0^2 \frac{\tilde{\varepsilon}_{1z}}{2} e^{-2i\delta z} (\vec{e}_{R_1}^- \cdot \vec{e}_{R_1}^+) & -i k_0^2 \varepsilon_m'' & 0 & -k_0^2 \frac{\varepsilon_{1x}}{2} (\vec{e}_{R_1}^- \cdot \vec{e}_{S_1}^-) \\ k_0^2 \frac{\tilde{\varepsilon}_{1x}}{2} (\vec{e}_{S_1}^+ \cdot \vec{e}_{R_1}^+) & 0 & -K_x(K_x - 2\gamma_x) + i k_0^2 \varepsilon_m'' & k_0^2 \frac{\varepsilon_{1z}}{2} e^{2i\delta z} (\vec{e}_{S_1}^+ \cdot \vec{e}_{S_1}^-) \\ 0 & -k_0^2 \frac{\tilde{\varepsilon}_{1x}}{2} (\vec{e}_{S_1}^- \cdot \vec{e}_{R_1}^-) & -k_0^2 \frac{\tilde{\varepsilon}_{1z}}{2} e^{-2i\delta z} (\vec{e}_{S_1}^- \cdot \vec{e}_{S_1}^+) & K_x(K_x - 2\gamma_x) - i k_0^2 \varepsilon_m'' \end{pmatrix}$$

Comme dans l'H1D, il apparaît que cet opérateur d'évolution est similaire à celui obtenu en polarisation TE [cf. Eq. (III.14)], si ce n'est que tous les termes non-diagonaux — qui traduisent soit le couplage co-propagatif entre ondes « R » et « S » de même sens de propagation, soit le couplage contra-propagatif entre ondes « R » ou entre ondes « S » — sont modifiés par des facteurs angulaires traduisant le plus ou moins bon recouvrement des champs électriques (non colinéaires, à la différence de leurs homologues en polarisation TE) des ondes en interaction. Ces facteurs angulaires peuvent s'exprimer en fonction des angles d'inclinaison des vecteurs d'ondes en présence (cf. Fig. III.4) :

$$\vec{e}_{R_1}^+ \cdot \vec{e}_{S_1}^+ = \vec{e}_{S_1}^+ \cdot \vec{e}_{R_1}^+ = \vec{e}_{R_1}^- \cdot \vec{e}_{S_1}^- = \vec{e}_{S_1}^- \cdot \vec{e}_{R_1}^- = \cos\left(\left|\theta_{R_1}^+\right| + \left|\theta_{S_1}^+\right|\right), \quad (\text{III.37a})$$

$$\vec{e}_{R_1}^+ \cdot \vec{e}_{R_1}^- = \vec{e}_{R_1}^- \cdot \vec{e}_{R_1}^+ = \cos\left(2\theta_{R_1}^+\right), \quad (\text{III.37b})$$

$$\vec{e}_{S_1}^+ \cdot \vec{e}_{S_1}^- = \vec{e}_{S_1}^- \cdot \vec{e}_{S_1}^+ = \cos\left(2\theta_{S_1}^+\right). \quad (\text{III.37c})$$

Les autres termes de l'opérateur d'évolution en polarisation TM sont identiques à ceux identifiés en polarisation TE, et on repère sans difficulté le coefficient d'absorption (ou de gain) α , le coefficient de désaccord spectral co-propagatif Δ , les coefficients de couplage co-propagatifs χ_s et $\tilde{\chi}_s$, ou contra-propagatifs κ_s et $\tilde{\kappa}_s$, et l'opérateur d'évolution s'écrit de manière plus compacte selon :

$$[K_p] = \begin{pmatrix} i\alpha & \kappa_s e^{2i\delta z} \cos(2\theta_{R_1}^+) & \chi_s \cos\left(\left|\theta_{R_1}^+\right| + \left|\theta_{S_1}^+\right|\right) & 0 \\ -\tilde{\kappa}_s e^{-2i\delta z} \cos(2\theta_{R_1}^+) & -i\alpha & 0 & -\chi_s \cos\left(\left|\theta_{R_1}^+\right| + \left|\theta_{S_1}^+\right|\right) \\ \tilde{\chi}_s \cos\left(\left|\theta_{R_1}^+\right| + \left|\theta_{S_1}^+\right|\right) & 0 & i\alpha - 2\Delta & \kappa_s e^{2i\delta z} \cos(2\theta_{S_1}^+) \\ 0 & -\tilde{\chi}_s \cos\left(\left|\theta_{R_1}^+\right| + \left|\theta_{S_1}^+\right|\right) & -\tilde{\kappa}_s e^{-2i\delta z} \cos(2\theta_{S_1}^+) & -(i\alpha - 2\Delta) \end{pmatrix}. \quad (\text{III.38})$$

Rappelons qu'à ce stade, nous avons défini pour l'H1D des coefficients de couplage co-directionnel en polarisation TM (ou p), notés χ_p et $\tilde{\chi}_p$, et on peut faire de même pour les coefficients de couplage contra-directionnel de l'H2D, avec :

$$\chi_p = \chi_s \cos\left(\left|\theta_{R_1}^+\right| + \left|\theta_{S_1}^+\right|\right) = \frac{k_0^2 \varepsilon_{1x}}{4\beta_1} \cos\left(\left|\theta_{R_1}^+\right| + \left|\theta_{S_1}^+\right|\right), \quad (\text{III.39a})$$

$$\tilde{\chi}_p = \tilde{\chi}_s \cos(|\theta_{R_1}^+| + |\theta_{S_1}^+|) = \frac{k_0^2 \tilde{\epsilon}_{1x}}{4\beta_1} \cos(|\theta_{R_1}^+| + |\theta_{S_1}^+|), \quad (\text{III.39b})$$

$$\kappa_p^R = \kappa_s \cos(2\theta_{R_1}^+) = \frac{k_0^2 \epsilon_{1z}}{4\beta_1} \cos(2\theta_{R_1}^+), \quad (\text{III.39c})$$

$$\kappa_p^S = \kappa_s \cos(2\theta_{S_1}^+) = \frac{k_0^2 \epsilon_{1z}}{4\beta_1} \cos(2\theta_{S_1}^+), \quad (\text{III.39d})$$

$$\tilde{\kappa}_p^R = \tilde{\kappa}_s \cos(2\theta_{R_1}^+) = \frac{k_0^2 \tilde{\epsilon}_{1z}}{4\beta_1} \cos(2\theta_{R_1}^+), \quad (\text{III.39e})$$

$$\tilde{\kappa}_p^S = \tilde{\kappa}_s \cos(2\theta_{S_1}^+) = \frac{k_0^2 \tilde{\epsilon}_{1z}}{4\beta_1} \cos(2\theta_{S_1}^+). \quad (\text{III.39f})$$

Notons qu'à la différence des coefficients de couplage co-directionnel, les coefficients de couplage contra-directionnel en polarisation TM ne prennent pas la même valeur selon que l'on considère le couplage entre ondes « R » contra-propagatives, ou entre ondes « S » contra-propagatives. Cela est à relier au fait qu'en règle générale, ondes « R » et ondes « S » ne se propagent pas sous des angles $\theta_{R_1}^+$ et $\theta_{S_1}^+$ égaux dans l'H2D, et que le recouvrement des champs contra-propagatifs n'est donc pas identique pour les deux types d'ondes.

Avec ces notations, l'opérateur d'évolution en polarisation TM devient :

$$[K_p] = \begin{pmatrix} i\alpha & \kappa_p^R e^{2i\delta z} & \chi_p & 0 \\ -\tilde{\kappa}_p^R e^{-2i\delta z} & -i\alpha & 0 & -\chi_p \\ \tilde{\chi}_p & 0 & i\alpha - 2\Delta & \kappa_p^S e^{2i\delta z} \\ 0 & -\tilde{\chi}_p & -\tilde{\kappa}_p^S e^{-2i\delta z} & -(i\alpha - 2\Delta) \end{pmatrix}. \quad (\text{III.40})$$

L'obtention d'un opérateur d'évolution $[K]$ quelque peu symétrisé, et indépendant de la variable z , se fait, comme en polarisation TE, *via* l'introduction d'enveloppes $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$ et $D(z)$ judicieusement déphasées [Éqs. (III.17)] par rapport à $R^+(z)$, $R^-(z)$, $S^+(z)$ et $S^-(z)$, et celle des paramètres mixtes de désaccord de phase δ_1 et δ_2 [Éqs. (III.18)], ce qui mène à :

$$i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = [K] \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 & \kappa_p^R & \chi_p & 0 \\ -\tilde{\kappa}_p^R & -\delta_1 & 0 & -\chi_p \\ \tilde{\chi}_p & 0 & \delta_2 & \kappa_p^S \\ 0 & -\tilde{\chi}_p & -\tilde{\kappa}_p^S & -\delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}. \quad (\text{III.41})$$

II.2. MATRICE DE TRANSFERT DE L'HOLOGRAMME 2D

Que ce soit en polarisation TE ou TM, nous sommes parvenus à un opérateur d'évolution indépendant de l'abscisse z , portant sur des enveloppes A , B , C et D déphasées par

rapport aux enveloppes lentement variables originelles. Cet opérateur prend la forme suivante, commune aux deux états principaux de polarisation :

$$[K] = \begin{pmatrix} \delta_1 & \kappa_{s,p}^R & \chi_{s,p} & 0 \\ -\tilde{\kappa}_{s,p}^R & -\delta_1 & 0 & -\chi_{s,p} \\ \tilde{\chi}_{s,p} & 0 & \delta_2 & \kappa_{s,p}^S \\ 0 & -\tilde{\chi}_{s,p} & -\tilde{\kappa}_{s,p}^S & -\delta_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{III.42})$$

où $\kappa_s^R = \kappa_s^S = \kappa_s$ et $\tilde{\kappa}_s^R = \tilde{\kappa}_s^S = \tilde{\kappa}_s$ en polarisation TE, tandis qu'en polarisation TM, $\kappa_p^R \neq \kappa_p^S$ et $\tilde{\kappa}_p^R \neq \tilde{\kappa}_p^S$.

Quel que soit l'état de polarisation, on constate, nous l'avons dit, que cet opérateur d'évolution n'est plus aussi simple que dans l'H1D, car il n'est plus question, ici, de séparer le problème en deux sous-problèmes indépendants. En effet, dans l'H1D, le champ d'enveloppe décalée A n'interagissait qu'avec celui d'enveloppe C (et de même pour les champs d'enveloppes B et D), ce qui se traduisait dans la forme « en damier » de l'opérateur $[K]$. Dans l'H2D, en revanche, chaque champ interagit avec un champ qui lui est co-propagatif et un champ qui lui est contra-propagatif : $\vec{E}_{R_1}^+$ avec $\vec{E}_{R_1}^-$ et $\vec{E}_{S_1}^+$, par exemple.

Dès lors, il apparaît vite que la procédure de détermination de la matrice de transfert de l'hologramme par diagonalisation et recherche des modes propres de deux sous-opérateurs d'évolution (2×2) ne peut s'appliquer pour l'H2D. Dans le cas général, la diagonalisation de l'opérateur (4×4) mène à un polynôme caractéristique de degré 4 dont la détermination analytique des racines (valeurs propres) n'est pas toujours possible. La solution que nous retenons consiste en une symétrisation (par renormalisation) plus poussée de cet opérateur (4×4) *via* un premier changement de base, puis en un recours à un second changement de base, de type *gerade/ungerade* familier à la Mécanique Quantique, qui permet *in fine* une détermination analytique relativement simple de la matrice de transfert.

II.2.1. RENORMALISATION DE L'OPÉRATEUR D'ÉVOLUTION

L'objectif de cette étape de calcul est de réduire le nombre de paramètres indépendants de l'opérateur d'évolution $[K]$ — ils sont au nombre de 6 en polarisation TE, de 8 en polarisation TM — en faisant apparaître de possibles symétries.

Pour ce faire, commençons par évaluer l'impact, sur l'opérateur d'évolution, d'un redimensionnement des amplitudes A , B , C et D . Considérons à cet effet le redimensionnement quelconque du vecteur colonne $V = (A, B, C, D)$ en un vecteur $V' = (A', B', C', D')$ tel que :

$$V' = \begin{pmatrix} A' \\ B' \\ C' \\ D' \end{pmatrix} = [v] \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}, \quad (\text{III.43a})$$

$$V = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = [v]^{-1} \begin{pmatrix} A' \\ B' \\ C' \\ D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/v_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/v_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/v_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/v_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' \\ B' \\ C' \\ D' \end{pmatrix}, \quad (\text{III.43b})$$

où $[v]$ est la matrice de changement de base par renormalisation.

L'opérateur d'évolution $[K']$ portant sur le vecteur V' se déduit aisément de $[K]$:

$$i \frac{dV'}{dz} = [K'] V' = i [v] \frac{dV}{dz} = [v] [K] V = [v] [K] [v]^{-1} V', \quad (\text{III.44a})$$

soit encore :

$$\begin{cases} [K'] = [v] [K] [v]^{-1} \\ [K] = [v]^{-1} [K'] [v] \end{cases}, \quad (\text{III.44b})$$

et on obtient donc :

$$[K'] = [v] [K] [v]^{-1} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \frac{v_A}{v_B} & K_{13} \frac{v_A}{v_C} & K_{14} \frac{v_A}{v_D} \\ K_{21} \frac{v_B}{v_A} & K_{22} & K_{23} \frac{v_B}{v_C} & K_{24} \frac{v_B}{v_D} \\ K_{31} \frac{v_C}{v_A} & K_{32} \frac{v_C}{v_B} & K_{33} & K_{34} \frac{v_C}{v_D} \\ K_{41} \frac{v_D}{v_A} & K_{42} \frac{v_D}{v_B} & K_{43} \frac{v_D}{v_C} & K_{44} \end{pmatrix}. \quad (\text{III.45})$$

Il s'agit dès lors de choisir judicieusement les constantes v_A, v_B, v_C et v_D pour faire apparaître des symétries intéressantes qui permettent de réduire le nombre d'éléments indépendants de l'opérateur $[K']$. En effet, avec :

$$v_A = v_C \text{ et } v_B = v_D, \text{ tels que } \frac{v_A}{v_B} = \frac{v_C}{v_D} = \left(\frac{\tilde{\kappa}_s^R}{\kappa_s^R} \right)^{1/2} = \left(\frac{\tilde{\kappa}_s}{\kappa_s} \right)^{1/2}, \quad (\text{III.46})$$

et en définissant un coefficient de couplage « effectif » en polarisation TE, commun aux ondes « R » et « S », selon :

$$\kappa_{eff,s}^R = \kappa_{eff,s}^S = \kappa_{eff} = \kappa_s \frac{v_A}{v_B} = \tilde{\kappa}_s \frac{v_B}{v_A} = \sqrt{\kappa_s \tilde{\kappa}_s}, \quad (\text{III.47})$$

on obtient les opérateurs renormalisés suivants pour chacun des états fondamentaux de polarisation :

$$\bullet \text{ \underline{État TE (s)} : } \quad [K'_s] = \begin{pmatrix} \delta_1 & \kappa_{eff} & \chi_s & 0 \\ -\kappa_{eff} & -\delta_1 & 0 & -\chi_s \\ \tilde{\chi}_s & 0 & \delta_2 & \kappa_{eff} \\ 0 & -\tilde{\chi}_s & -\kappa_{eff} & -\delta_2 \end{pmatrix}; \quad (\text{III.48a})$$

$$\bullet \text{ \underline{État TM (p)} : } \quad [K'_p] = \begin{pmatrix} \delta_1 & \kappa_{eff} \cos(2\theta_{R_1}^+) & \chi_p & 0 \\ -\kappa_{eff} \cos(2\theta_{R_1}^+) & -\delta_1 & 0 & -\chi_p \\ \tilde{\chi}_p & 0 & \delta_2 & \kappa_{eff} \cos(2\theta_{S_1}^+) \\ 0 & -\tilde{\chi}_p & -\kappa_{eff} \cos(2\theta_{S_1}^+) & -\delta_2 \end{pmatrix} \quad (\text{III.48b})$$

$$\text{soit encore : } \quad [K'_p] = \begin{pmatrix} \delta_1 & \kappa_{eff,p}^R & \chi_p & 0 \\ -\kappa_{eff,p}^R & -\delta_1 & 0 & -\chi_p \\ \tilde{\chi}_p & 0 & \delta_2 & \kappa_{eff,p}^S \\ 0 & -\tilde{\chi}_p & -\kappa_{eff,p}^S & -\delta_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{III.48c})$$

où l'on a introduit deux coefficients de couplage « effectif » différents, en polarisation TM, pour les ondes « R » et « S », et qui s'écrivent respectivement :

$$\kappa_{eff,p}^R = \kappa_{eff} \cos(2\theta_{R_1}^+) \text{ et } \kappa_{eff,p}^S = \kappa_{eff} \cos(2\theta_{S_1}^+). \quad (\text{III.49})$$

L'opération de renormalisation permet donc de réduire le nombre d'éléments indépendants de l'opérateur d'évolution à 5 (au lieu de 6) en polarisation TE, et à 6 (au lieu de 8) en polarisation TM, tout en symétrisant les coefficients de couplage contra-directionnel : il n'en subsiste qu'un seul dans l'état TE, et 2 (voire 1 lorsque la condition $\theta_{R_1}^+ = \theta_{S_1}^+$ est vérifiée) dans l'état TM.

II.2.2. PASSAGE EN BASE G/U

À partir d'opérateurs symétrisés par l'opération de renormalisation, il devient plus aisé de les transformer plus avant par changement de base afin de faire apparaître un plus grand nombre de zéros — idéalement, d'obtenir des opérateurs diagonaux par blocs, dont l'équation caractéristique, lors de la diagonalisation, puisse si possible se ramener à un polynôme de degré 2.

La technique que nous adoptons est le passage dans une base dite G/U (vocabulaire emprunté à la Mécanique Quantique, qui se réfère aux initiales des adjectifs allemands *gerade* et *ungerade*, pour pair/impair), qui permet une telle transformation des opérateurs d'évolution.

Ce changement de base transforme le vecteur $V' = (A', B', C', D')$ écrit dans la base de renormalisation en vecteur $V^{G/U} = (A^{G/U}, B^{G/U}, C^{G/U}, D^{G/U})$ dans la nouvelle base, et *vice versa*, par l'intermédiaire des matrices de passage $[T]$ et $[T]^{-1}$ tels que :

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \\ C' \\ D' \end{pmatrix} = [T] \begin{pmatrix} A^{G/U} \\ B^{G/U} \\ C^{G/U} \\ D^{G/U} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{G/U} \\ B^{G/U} \\ C^{G/U} \\ D^{G/U} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} A^{G/U} - C^{G/U} \\ A^{G/U} + C^{G/U} \\ B^{G/U} - D^{G/U} \\ B^{G/U} + D^{G/U} \end{pmatrix}, \quad (\text{III.50a})$$

$$\begin{pmatrix} A^{G/U} \\ B^{G/U} \\ C^{G/U} \\ D^{G/U} \end{pmatrix} = [T]^{-1} \begin{pmatrix} A' \\ B' \\ C' \\ D' \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' \\ B' \\ C' \\ D' \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} A' + B' \\ C' + D' \\ -A' + B' \\ -C' + D' \end{pmatrix}. \quad (\text{III.50b})$$

Par ce changement de base, l'opérateur d'évolution $[K^{G/U}]$ portant sur le vecteur $V^{G/U}$ se déduit aisément de $[K']$:

$$i \frac{dV^{G/U}}{dz} = [K^{G/U}] V^{G/U} = i [T]^{-1} \frac{dV'}{dz} = [T]^{-1} [K'] V' = [T]^{-1} [K'] [T] V^{G/U} \quad (\text{III.51a})$$

$$\text{soit encore :} \quad \begin{cases} [K^{G/U}] = [T]^{-1} [K'] [T] \\ [K'] = [T] [K^{G/U}] [T]^{-1} \end{cases} \quad (\text{III.51b})$$

Cette transformation par passage dans la base G/U mène à un opérateur d'évolution très simplifié, que ce soit dans l'état TE ou dans l'état TM. En effet, on vérifie immédiatement que :

$$\bullet \text{ \underline{État TE (s)} : } \quad [K_s^{G/U}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta_1 + \kappa_{eff} & -\chi_s \\ 0 & 0 & -\tilde{\chi}_s & -\delta_2 + \kappa_{eff} \\ -\delta_1 - \kappa_{eff} & -\chi_s & 0 & 0 \\ -\tilde{\chi}_s & -\delta_2 - \kappa_{eff} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{III.52a})$$

$$\bullet \text{ \underline{État TM (p)} : } \quad [K_p^{G/U}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta_1 + \kappa_{eff,p}^R & -\chi_p \\ 0 & 0 & -\tilde{\chi}_p & -\delta_2 + \kappa_{eff,p}^S \\ -\delta_1 - \kappa_{eff,p}^R & -\chi_p & 0 & 0 \\ -\tilde{\chi}_p & -\delta_2 - \kappa_{eff,p}^S & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{III.52b})$$

On observe ainsi que pour chacun des états fondamentaux de polarisation, l'opérateur d'évolution des enveloppes des champs, dans la base G/U, partagent une même structure antidiagonale par blocs, qui va faciliter la détermination analytique des modes propres de propagation dans cette base.

II.2.3. DÉTERMINATION DES MODES PROPRES DANS LA BASE G/U

La forme générique de l'opérateur d'évolution, dans cette base, est ainsi :

$$[K^{G/U}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & b' & a' \\ c & b & 0 & 0 \\ b' & c' & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{III.53})$$

où l'on a introduit :

$$\begin{cases} a = -\delta_1 + \kappa_{eff,s(p)}^R \\ a' = -\delta_2 + \kappa_{eff,s(p)}^S \end{cases} \quad \begin{cases} b = -\chi_{s(p)} \\ b' = -\tilde{\chi}_{s(p)} \end{cases} \quad \begin{cases} c = -\delta_1 - \kappa_{eff,s(p)}^R \\ c' = -\delta_2 - \kappa_{eff,s(p)}^S \end{cases}, \quad (\text{III.54})$$

les expressions des coefficients de couplage « effectif » contra-directionnel propres à chaque état de polarisation étant données par les équations (III.47) et (III.49).

La recherche des éléments propres de cet opérateur passe d'abord par celle de ses valeurs propres, soit la résolution du système d'équations linéaires $[K^{G/U}] = \lambda[I]$, où $[I]$ est la matrice identité (4×4). La condition d'existence de solutions non-nulles pour ce système d'équations, $\det([K^{G/U}] - \lambda[I]) = 0$, mène à l'équation polynomiale de degré 4 et d'inconnue λ caractéristique de l'opérateur. Il s'agit ici d'une *équation bicarrée*, de la forme $\mathcal{A}\lambda^4 + \mathcal{B}\lambda^2 + \mathcal{C}$, où :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 1 \\ \mathcal{B} &= -[ac + a'c' + 2bb'] \\ \mathcal{C} &= (aa' - bb')(cc' - bb') \end{aligned} \quad (\text{III.55})$$

Cette équation caractéristique possède 4 racines *a priori* complexes, opposées deux à deux, valeurs propres de l'opérateur, qui s'écrivent, en fonction des éléments de $[K^{G/U}]$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\lambda_2 = \lambda_+ \\ \lambda_3 &= -\lambda_4 = \lambda_- \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \lambda_{\pm} = \sqrt{\frac{-\mathcal{B} \pm \sqrt{\mathcal{D}}}{2}}, \quad (\text{III.56})$$

où \mathcal{D} est le discriminant de l'équation caractéristique bicarrée et prend la forme générale :

$$\mathcal{D} = (ac - a'c')^2 + 4bb'(ac + a'c' + aa' + cc'). \quad (\text{III.57})$$

L'écriture analytique détaillée des valeurs propres de l'opérateur dans la base G/U en fonction des coefficients couploniques — et, *a fortiori*, en fonction des paramètres physiques de l'H2D et des paramètres d'injection — ne présente aucune difficulté de principe, mais on comprendra aisément qu'elle soit peu lisible : dans le cas général, il est difficile de la simplifier. C'est pourquoi nous poursuivrons l'étude de l'obtention de la matrice de transfert de l'H2D sans toujours exprimer les termes qui la composeront de manière entièrement explicite : les développements qui précèdent permettent néanmoins de le faire si besoin est.

Dès lors que l'on dispose des valeurs propres de l'opérateur d'évolution, on peut déterminer un quadruplet de vecteurs propres qui leur sont associés, proportionnels aux modes propres de propagation de l'H2D exprimés dans la base G/U, et qui doivent vérifier :

$$[K^{G/U}] V_\sigma = \lambda_\sigma V_\sigma, \quad \sigma \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad (\text{III.58})$$

soit encore, en introduisant les composantes $(x_\sigma, y_\sigma, z_\sigma, t_\sigma)$ de V_σ dans cette base :

$$\begin{pmatrix} -\lambda_\sigma & 0 & a & b \\ 0 & -\lambda_\sigma & b' & a' \\ c & b & -\lambda_\sigma & 0 \\ b' & c' & 0 & -\lambda_\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\sigma \\ y_\sigma \\ z_\sigma \\ t_\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_\sigma x_\sigma + az_\sigma + bt_\sigma = 0 \\ -\lambda_\sigma y_\sigma + b'z_\sigma + a't_\sigma = 0 \\ cx_\sigma + by_\sigma - \lambda_\sigma z_\sigma = 0 \\ b'x_\sigma + c'y_\sigma - \lambda_\sigma t_\sigma = 0 \end{cases}. \quad (\text{III.59})$$

Il existe bien entendu une infinité de solutions $(x_\sigma, y_\sigma, z_\sigma, t_\sigma)$ à ce système d'équations, qui s'écrivent en fonction des éléments de l'opérateur d'évolution et de ses valeurs propres λ_σ . En procédant par exemple par substitution, on montre qu'un possible ensemble de composantes solutions du système d'équations (III.59) est le suivant :

$$\begin{cases} x_\sigma = \lambda_\sigma [\lambda_\sigma^2 - (a'c' + bb')] \\ y_\sigma = \lambda_\sigma (a'b' + b'c) \\ z_\sigma = c\lambda_\sigma^2 + a'(bb' - cc') \\ t_\sigma = b'\lambda_\sigma^2 - b'(bb' - cc') \end{cases}, \quad (\text{III.60})$$

et vérifie, compte-tenu des relations (III.56) entre valeurs propres :

$$\begin{aligned} x_2 &= -x_1 & \text{et} & & x_4 &= -x_3 \\ y_2 &= -y_1 & \text{et} & & y_4 &= -y_3 \\ z_2 &= z_1 & \text{et} & & z_4 &= z_3 \\ t_2 &= t_1 & \text{et} & & t_4 &= t_3 \end{aligned}. \quad (\text{III.61})$$

II.2.4. MATRICE DE TRANSFERT DANS LA BASE G/U

Par définition, dans la base des vecteurs (modes) propres dont nous venons de déterminer des composantes, l'opérateur d'évolution de l'H2D est diagonal et chaque vecteur propre obéit à l'équation :

$$i \frac{d}{dz} V_\sigma = \lambda_\sigma V_\sigma, \quad \sigma \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad (\text{III.62})$$

qui s'intègre immédiatement pour donner :

$$V_\sigma(z) = V_\sigma(0) \exp(-i \lambda_\sigma z), \quad (\text{III.63})$$

ce qui mène à une matrice de transfert $[H^{\text{bp}}]$ diagonale qui vérifie, entre les abscisses $z = 0$ et $z = L$:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix}_{z=0} = [H^{\text{bp}}] \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix}_{z=L} = \begin{pmatrix} e^{i\lambda_1 L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda_1 L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\lambda_3 L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\lambda_3 L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix}_{z=L}. \quad (\text{III.64})$$

La détermination de la matrice de transfert de l'H2D dans la base G/U — puis, successivement, dans les bases des enveloppes renormalisées (A', B', C', D') , des enveloppes déphasées (A, B, C, D) , des enveloppes lentement variables initiales (R^+, R^-, S^+, S^-) , et enfin des amplitudes $(E_{R_1}^+, E_{R_1}^-, E_{S_1}^+, E_{S_1}^-)$ des champs physiques au sein de l'H2D — n'est alors plus qu'une question d'algèbre linéaire, par changements de bases successifs, que l'on peut résumer ainsi :

$$[H^{\text{bp}}] \rightarrow [H^{\text{G/U}}] \rightarrow [H^{A'B'C'D'}] \rightarrow [H^{\text{ABCD}}] \rightarrow [H^{R^+R^-S^+S^-}] \rightarrow [H].$$

La matrice de transfert $[H^{\text{G/U}}]$ de l'H2D dans la base G/U se déduit ainsi tout d'abord de celle exprimée dans la base des modes propres par l'opération suivante :

$$[H^{\text{G/U}}] = [P][H^{\text{bp}}][P]^{-1}, \quad (\text{III.65})$$

où les colonnes de la matrice de passage inversible $[P]$ ne sont autres que les composantes des vecteurs propres V_σ déterminés plus haut. Ainsi, en tenant compte des symétries (III.61), on obtient :

$$[P] = \begin{pmatrix} x_1 & -x_1 & x_3 & -x_3 \\ y_1 & -y_1 & y_3 & -y_3 \\ z_1 & z_1 & z_3 & z_3 \\ t_1 & t_1 & t_3 & t_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{III.66})$$

dont la matrice inverse s'écrit :

$$[P]^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{y_3}{x_1 y_3 - x_3 y_1} & \frac{-x_3}{x_1 y_3 - x_3 y_1} & \frac{t_3}{z_1 t_3 - t_1 z_3} & \frac{-z_3}{z_1 t_3 - t_1 z_3} \\ \frac{-y_3}{x_1 y_3 - x_3 y_1} & \frac{x_3}{x_1 y_3 - x_3 y_1} & \frac{t_3}{z_1 t_3 - t_1 z_3} & \frac{-z_3}{z_1 t_3 - t_1 z_3} \\ \frac{-y_1}{x_1 y_3 - x_3 y_1} & \frac{x_1}{x_1 y_3 - x_3 y_1} & \frac{-t_1}{z_1 t_3 - t_1 z_3} & \frac{z_1}{z_1 t_3 - t_1 z_3} \\ \frac{y_1}{x_1 y_3 - x_3 y_1} & \frac{-x_1}{x_1 y_3 - x_3 y_1} & \frac{-t_1}{z_1 t_3 - t_1 z_3} & \frac{z_1}{z_1 t_3 - t_1 z_3} \end{pmatrix}. \quad (\text{III.67})$$

Notons qu'en développant les dénominateurs de chacun de ses éléments, il est possible de montrer que la matrice de passage inverse peut encore s'exprimer selon :

$$[P]^{-1} = f \begin{pmatrix} \eta y_3 & -\eta x_3 & t_3 & -z_3 \\ -\eta y_3 & \eta x_3 & t_3 & -z_3 \\ -\eta y_1 & \eta x_1 & -t_1 & z_1 \\ \eta y_1 & -\eta x_1 & -t_1 & z_1 \end{pmatrix}, \quad (\text{III.68})$$

où \mathcal{D} n'est autre que le discriminant de l'équation caractéristique de l'opérateur d'évolution $[K^{G/U}]$, et les coefficients f et η s'écrivent :

$$f = \frac{1}{2} \frac{1}{(c+a')b' \sqrt{\mathcal{D}} (cc' - bb')} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{z_1 t_3 - z_3 t_1}{x_1 y_3 - x_3 y_1} = \sqrt{\frac{cc' - bb'}{aa' - bb'}}. \quad (\text{III.69})$$

L'équation (III.65) permet alors, tous calculs faits, d'exprimer les éléments de la matrice de $[H^{G/U}]$ sous une forme compacte :

$$H_{11}^{G/U} = 2f\eta [x_1 y_3 \cos(\lambda_1 L) - x_3 y_1 \cos(\lambda_3 L)] \quad (\text{III.70a})$$

$$H_{12}^{G/U} = 2f\eta x_1 x_3 [-\cos(\lambda_1 L) + \cos(\lambda_3 L)] \quad (\text{III.70b})$$

$$H_{13}^{G/U} = 2if [x_1 t_3 \sin(\lambda_1 L) - x_3 t_1 \sin(\lambda_3 L)] \quad (\text{III.70c})$$

$$H_{14}^{G/U} = 2if [-x_1 z_3 \sin(\lambda_1 L) + x_3 z_1 \sin(\lambda_3 L)] \quad (\text{III.70d})$$

$$H_{21}^{G/U} = 2f\eta y_1 y_3 [\cos(\lambda_1 L) - \cos(\lambda_3 L)] \quad (\text{III.70e})$$

$$H_{22}^{G/U} = \eta [-x_3 y_1 \cos(\lambda_1 L) + x_1 y_3 \cos(\lambda_3 L)] \quad (\text{III.70f})$$

$$H_{23}^{G/U} = 2if [y_1 t_3 \sin(\lambda_1 L) - y_3 t_1 \sin(\lambda_3 L)] \quad (\text{III.70g})$$

$$H_{24}^{G/U} = 2if [-y_1 z_3 \sin(\lambda_1 L) + y_3 z_1 \sin(\lambda_3 L)] \quad (\text{III.70h})$$

$$H_{31}^{G/U} = 2if\eta [y_3 z_1 \sin(\lambda_1 L) - y_1 z_3 \sin(\lambda_3 L)] \quad (\text{III.70i})$$

$$H_{32}^{G/U} = 2if\eta [-x_3 z_1 \sin(\lambda_1 L) + x_1 z_3 \sin(\lambda_3 L)] \quad (\text{III.70j})$$

$$H_{33}^{G/U} = 2f [z_1 t_3 \cos(\lambda_1 L) - z_3 t_1 \cos(\lambda_3 L)] \quad (\text{III.70k})$$

$$H_{34}^{G/U} = 2f z_1 z_3 [-\cos(\lambda_1 L) + \cos(\lambda_3 L)] \quad (\text{III.70l})$$

$$H_{41}^{G/U} = 2if\eta [y_3 t_1 \sin(\lambda_1 L) - y_1 t_3 \sin(\lambda_3 L)] \quad (\text{III.70m})$$

$$H_{42}^{G/U} = 2if\eta [-x_3 t_1 \sin(\lambda_1 L) + x_1 t_3 \sin(\lambda_3 L)] \quad (\text{III.70n})$$

$$H_{43}^{G/U} = 2f t_1 t_3 [\cos(\lambda_1 L) - \cos(\lambda_3 L)] \quad (\text{III.70o})$$

$$H_{44}^{G/U} = 2f [-z_3 t_1 \cos(\lambda_1 L) + z_1 t_3 \cos(\lambda_3 L)] \quad (\text{III.70p})$$

II.2.5. MATRICE DE TRANSFERT DANS LA BASE (A', B', C', D')

En revenant sur nos pas, de proche en proche, on obtient alors la matrice de transfert dans la base (A', B', C', D') des enveloppes lentement variables renormalisées par l'intermédiaire des matrices de passage $[T]$ et $[T]^{-1}$ définies par les équations (III.50) :

$$[H^{A'B'C'D'}] = [T][H^{G/U}][T]^{-1}, \quad (\text{III.71})$$

dont les éléments $H_{ij}^{A'B'C'D'}$ sont des combinaisons linéaires très simples de ceux de $[H^{G/U}]$:

$$H_{11}^{A'B'C'D'} = \frac{1}{2}(H_{11}^{G/U} - H_{13}^{G/U} - H_{31}^{G/U} + H_{33}^{G/U}), \quad H_{12}^{A'B'C'D'} = \frac{1}{2}(H_{11}^{G/U} + H_{13}^{G/U} - H_{31}^{G/U} - H_{33}^{G/U}), \quad (\text{III.72a-b})$$

$$H_{13}^{A'B'C'D'} = \frac{1}{2}(H_{12}^{G/U} - H_{14}^{G/U} - H_{32}^{G/U} + H_{34}^{G/U}), \quad H_{14}^{A'B'C'D'} = \frac{1}{2}(H_{12}^{G/U} + H_{14}^{G/U} - H_{32}^{G/U} - H_{34}^{G/U}), \quad (\text{III.72c-d})$$

$$H_{21}^{A'B'C'D'} = \frac{1}{2}(H_{11}^{G/U} - H_{13}^{G/U} + H_{31}^{G/U} - H_{33}^{G/U}), \quad H_{22}^{A'B'C'D'} = \frac{1}{2}(H_{11}^{G/U} + H_{13}^{G/U} + H_{31}^{G/U} + H_{33}^{G/U}), \quad (\text{III.72e-f})$$

$$H_{23}^{A'B'C'D'} = \frac{1}{2}(H_{12}^{G/U} - H_{14}^{G/U} + H_{32}^{G/U} - H_{34}^{G/U}), \quad H_{24}^{A'B'C'D'} = \frac{1}{2}(H_{12}^{G/U} + H_{14}^{G/U} + H_{32}^{G/U} + H_{34}^{G/U}), \quad (\text{III.72g-h})$$

$$H_{31}^{A'B'C'D'} = \frac{1}{2}(H_{21}^{G/U} - H_{23}^{G/U} - H_{41}^{G/U} + H_{43}^{G/U}), \quad H_{32}^{A'B'C'D'} = \frac{1}{2}(H_{21}^{G/U} + H_{23}^{G/U} - H_{41}^{G/U} - H_{43}^{G/U}), \quad (\text{III.72i-j})$$

$$H_{33}^{A'B'C'D'} = \frac{1}{2}(H_{22}^{G/U} - H_{24}^{G/U} - H_{42}^{G/U} + H_{44}^{G/U}), \quad H_{34}^{A'B'C'D'} = \frac{1}{2}(H_{22}^{G/U} + H_{24}^{G/U} - H_{42}^{G/U} - H_{44}^{G/U}), \quad (\text{III.72k-l})$$

$$H_{41}^{A'B'C'D'} = \frac{1}{2}(H_{21}^{G/U} - H_{23}^{G/U} + H_{41}^{G/U} - H_{43}^{G/U}), \quad H_{42}^{A'B'C'D'} = \frac{1}{2}(H_{21}^{G/U} + H_{23}^{G/U} + H_{41}^{G/U} + H_{43}^{G/U}), \quad (\text{III.72m-n})$$

$$H_{43}^{A'B'C'D'} = \frac{1}{2} (H_{22}^{G/U} - H_{24}^{G/U} + H_{42}^{G/U} - H_{44}^{G/U}), \quad H_{44}^{A'B'C'D'} = \frac{1}{2} (H_{22}^{G/U} + H_{24}^{G/U} + H_{42}^{G/U} + H_{44}^{G/U}). \quad (\text{III.72o-p})$$

II.2.6. MATRICE DE TRANSFERT DANS LA BASE (A, B, C, D)

Cette fois-ci, les matrices de passage sont la matrice de renormalisation $[\nu]$ et son inverse $[\nu]^{-1}$ telles que définies par les équations (III.59)–(III.60), et l'application de la relation de changement de base nous permet d'obtenir la matrice de transfert de l'H2D dans la base (A, B, C, D) des enveloppes lentement variables déphasées, avec :

$$[H^{ABCD}] = [\nu]^{-1} [H^{A'B'C'D'}] [\nu], \quad (\text{III.73})$$

dont les éléments H_{ij}^{ABCD} se déduisent aisément de ceux de $[H^{A'B'C'D'}]$ selon :

$$[H^{ABCD}] = \begin{pmatrix} H_{11}^{A'B'C'D'} & \frac{\nu_B}{\nu_A} H_{12}^{A'B'C'D'} & \frac{\nu_C}{\nu_A} H_{13}^{A'B'C'D'} & \frac{\nu_D}{\nu_A} H_{14}^{A'B'C'D'} \\ \frac{\nu_A}{\nu_B} H_{21}^{A'B'C'D'} & H_{22}^{A'B'C'D'} & \frac{\nu_C}{\nu_B} H_{23}^{A'B'C'D'} & \frac{\nu_D}{\nu_B} H_{24}^{A'B'C'D'} \\ \frac{\nu_A}{\nu_C} H_{31}^{A'B'C'D'} & \frac{\nu_B}{\nu_C} H_{32}^{A'B'C'D'} & H_{33}^{A'B'C'D'} & \frac{\nu_D}{\nu_C} H_{34}^{A'B'C'D'} \\ \frac{\nu_A}{\nu_D} H_{41}^{A'B'C'D'} & \frac{\nu_B}{\nu_D} H_{42}^{A'B'C'D'} & \frac{\nu_C}{\nu_D} H_{43}^{A'B'C'D'} & H_{44}^{A'B'C'D'} \end{pmatrix}. \quad (\text{III.74})$$

On sait, cependant, que les constantes de normalisation ν_A , ν_B , ν_C et ν_D vérifient les équations (III.46), ce qui permet de réécrire la matrice $[H^{ABCD}]$ en faisant apparaître les coefficients de couplage contra-propagatif :

$$[H^{ABCD}] = \begin{pmatrix} H_{11}^{A'B'C'D'} & \left(\frac{\kappa_s}{\tilde{\kappa}_s}\right)^{1/2} H_{12}^{A'B'C'D'} & H_{13}^{A'B'C'D'} & \left(\frac{\kappa_s}{\tilde{\kappa}_s}\right)^{1/2} H_{14}^{A'B'C'D'} \\ \left(\frac{\tilde{\kappa}_s}{\kappa_s}\right)^{1/2} H_{21}^{A'B'C'D'} & H_{22}^{A'B'C'D'} & \left(\frac{\tilde{\kappa}_s}{\kappa_s}\right)^{1/2} H_{23}^{A'B'C'D'} & H_{24}^{A'B'C'D'} \\ H_{31}^{A'B'C'D'} & \left(\frac{\kappa_s}{\tilde{\kappa}_s}\right)^{1/2} H_{32}^{A'B'C'D'} & H_{33}^{A'B'C'D'} & \left(\frac{\kappa_s}{\tilde{\kappa}_s}\right)^{1/2} H_{34}^{A'B'C'D'} \\ \left(\frac{\tilde{\kappa}_s}{\kappa_s}\right)^{1/2} H_{41}^{A'B'C'D'} & H_{42}^{A'B'C'D'} & \left(\frac{\tilde{\kappa}_s}{\kappa_s}\right)^{1/2} H_{43}^{A'B'C'D'} & H_{44}^{A'B'C'D'} \end{pmatrix}. \quad (\text{III.75})$$

II.2.7. MATRICE DE TRANSFERT DANS LA BASE (R^+, R^-, S^+, S^-)

Pénultième étape de l'obtention de la matrice de transfert de l'H2D dans la base des champs « physiques », son écriture, dans la base des enveloppes lentement variables initiales des quatre ondes en interaction dans la structure, se déduit immédiatement des relations de déphasage $R^+(z) = A(z) \exp(i\delta z)$, $R^-(z) = B(z) \exp(-i\delta z)$, $S^+(z) = C(z) \exp(i\delta z)$, et $S^-(z) = D(z) \exp(-i\delta z)$:

$$[H^{R^+R^-S^+S^-}] = [H^{ABCD}] \begin{pmatrix} \exp(-i\delta L) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(i\delta L) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-i\delta L) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(i\delta L) \end{pmatrix}. \quad (\text{III.76})$$

II.2.8. MATRICE DE TRANSFERT POUR LES CHAMPS PHYSIQUES

Par « champs physiques », nous entendons les champs des ondes dont, en pratique, on peut mesurer l'intensité en sortie de l'H2D et qui résultent de la réfraction, réflexion, diffraction et rétrodiffraction de l'onde incidente. Il s'agit donc des champs notés $\vec{E}_{R_1}^+$, $\vec{E}_{R_1}^-$, $\vec{E}_{S_1}^+$ et $\vec{E}_{S_1}^-$ au début de ce chapitre et qui entretiennent avec les enveloppes lentement variables R^+ , R^- , S^+ et S^- les relations (III.6). Afin d'obtenir la matrice de transfert $[H]$ de l'hologramme pour les amplitudes $E_{R_1}^+$, $E_{R_1}^-$, $E_{S_1}^+$ et $E_{S_1}^-$ de ces champs physiques, il nous faut prendre en compte les déphasages qui affectent ces ondes, du point de vue de la propagation dans un sens ou dans l'autre le long de l'axe (Oz), entre les abscisses $z = 0$ et $z = L$, comme nous l'avons fait pour l'H1D.

Il vient alors :

$$[H] = [H^{R^+R^-S^+S^-}] \begin{pmatrix} \exp(i\beta_1 L) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-i\beta_1 L) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(i\beta_1 L) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(-i\beta_1 L) \end{pmatrix}, \quad (\text{III.77})$$

où, rappelons-le, β_1 est, au signe près, la composante selon (Oz) commune aux quatre vecteurs d'onde en présence.

Comme pour l'H1D, la forme générique de cette matrice de transfert est valide pour chacun des états fondamentaux de polarisation TE et TM, et permet donc de calculer la réponse de l'H2D à n'importe quel état de polarisation incident — à condition bien entendu d'adapter, tout au long des calculs analytiques, les expressions des termes qui dépendent de la polarisation incidente, à savoir les coefficients de couplage co- et contra-propagatifs et les paramètres qui en découlent. D'une manière générale, nous avons pu constater que les expressions des éléments de la matrice de transfert sont beaucoup plus lourdes et complexes pour l'H2D que pour son homologue unidimensionnel. Il est néanmoins remarquable que l'approche tout-analytique, dans le cadre des hypothèses que nous avons faites, reste possible dans une structure bi-dimensionnelle, sans qu'il ait

été besoin de faire appel à des techniques de calcul numériques — qui elles aussi, d'ailleurs, s'appuient généralement sur des hypothèses simplificatrices.

III. COEFFICIENTS DE RÉPARTITION ET RÉPONSES DE L'H2D

III.1. COEFFICIENTS DE REPARTITION DE L'H2D

L'expression des coefficients de répartition en intensité — qui quantifient, rappelons-le, les intensités des ondes réfléchi, transmise, diffractée et rétrodiffractée par la structure dans laquelle une onde entrante a été injectée — nécessite, comme au chapitre précédent, de prendre en compte les miroirs qui délimitent l'H2D inhomogène d'indice de réfraction moyen n_m et le séparent des milieux extérieurs homogènes d'indices respectifs n_0 et n_2 .

Les expressions génériques obtenues au Chapitre II, et en particulier celles spécifiques à des interfaces, restent évidemment valides dans le cas de l'H2D. Comme pour l'hologramme unidimensionnel, on obtient donc la matrice de transfert « globale » de l'H2D, en tenant compte de ses interfaces avec les milieux qui l'entourent, entre les champs immédiatement avant sa face d'entrée (dans le milieu d'indice n_0 , en $z = 0^-$) et ceux immédiatement après sa face de sortie (dans le milieu d'indice n_2 , en $z = L^+$), par simple produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} E_{R_0}^+ \\ E_{R_0}^- \\ E_{S_0}^+ \\ E_{S_0}^- \end{pmatrix}_{z=0^-} = [M] \begin{pmatrix} E_{R_2}^+ \\ E_{R_2}^- \\ E_{S_2}^+ \\ E_{S_2}^- \end{pmatrix}_{z=L^+} = [A] [H] [B] \begin{pmatrix} E_{R_2}^+ \\ E_{R_2}^- \\ E_{S_2}^+ \\ E_{S_2}^- \end{pmatrix}_{z=L^+}, \quad (\text{III.78})$$

où $[A]$ et $[B]$ sont les matrices caractéristiques des interfaces A et B respectivement situées en $z = 0$ et en $z = L$.

En supposant que l'injection de lumière dans cet H2D passif se fait exclusivement par l'interface A, les quatre coefficients « globaux » (tenant compte des effets interfaciaux) de réflexion r_G , transmission t_G , diffraction t_{dG} et rétrodiffraction r_{dG} en amplitude ont alors des expressions identiques à celles obtenues pour l'H1D passif :

$$r_G = \frac{E_{R_0}^-}{E_{R_0}^+} = \frac{M_{21} M_{33} - M_{23} M_{31}}{M_{11} M_{33} - M_{13} M_{31}}, \quad t_G = \frac{E_{R_2}^+}{E_{R_0}^+} = \frac{M_{33}}{M_{11} M_{33} - M_{13} M_{31}}, \quad (\text{III.79a-b})$$

$$r_{dG} = \frac{E_{S_0}^-}{E_{R_0}^+} = \frac{M_{33} M_{41} - M_{31} M_{43}}{M_{11} M_{33} - M_{13} M_{31}}, \quad t_{dG} = \frac{E_{S_2}^+}{E_{R_0}^+} = \frac{-M_{31}}{M_{11} M_{33} - M_{13} M_{31}}, \quad (\text{III.79c-d})$$

de même que sont identiques celles des coefficients de répartition en intensité :

$$R = \frac{k_{R_0} \cos \theta_{R_0}^-}{k_{R_0} \cos \theta_{R_0}^+} |r_G|^2 = |r_G|^2, \quad (\text{III.80a})$$

$$T = \frac{k_{R_2} \cos \theta_{R_2}^+}{k_{R_0} \cos \theta_{R_0}^+} |t_G|^2 = \frac{n_2 \cos \theta_{R_2}^+}{n_0 \cos \theta_{R_0}^+} |t_G|^2 \quad (\text{III.80b})$$

$$R_d = \frac{k_{S_0} \cos \theta_{S_0}^-}{k_{R_0} \cos \theta_{R_0}^+} |r_{dG}|^2 = \frac{\cos \theta_{S_0}^-}{\cos \theta_{R_0}^+} |r_{dG}|^2, \quad (\text{III.80c})$$

$$T_d = \frac{k_{S_2} \cos \theta_{S_2}^+}{k_{R_0} \cos \theta_{R_0}^+} |t_{dG}|^2 = \frac{n_2 \cos \theta_{S_2}^+}{n_0 \cos \theta_{R_0}^+} |t_{dG}|^2. \quad (\text{III.80d})$$

L'H2D constituant une cavité, le même terme $D = M_{11} M_{33} - M_{13} M_{31}$ apparaît à leur dénominateur (ou $|D|^2$ pour les coefficients en intensité), dont les conditions d'éventuelle annulation caractérise les modes de résonance de la structure. Notons que si ses interfaces font de l'H1D une cavité (de fait, il s'agit, nous l'avons dit, d'un Fabry-Perot renfermant un réseau épais de diffraction en transmission), il n'en est pas de même pour l'H2D qui serait une cavité même sans interfaces, la rétroaction étant ici assurée par le miroir distribué (DBR) que constitue le réseau de diffraction en réflexion.

III.2. REPONSES OPTIQUES DE LA STRUCTURE

Dans cette partie, nous faisons des expériences de modélisation en variant de paramètres physiques et caractéristiques de l'onde de référence incidente et de l'hologramme 2D afin d'étudier les coefficients énergétiques de diffraction et de réflexion lorsqu'une onde électromagnétique plane (onde de référence) est incidente sur l'hologramme 2D. Nous nous intéressons en particulier à l'évolution du coefficient de diffraction énergétique lorsque le désaccord de phase co-directionnel (Δ) est nul (démonstré dans le chapitre II de l'hologramme 1D) et le coefficient de réflexion énergétique lorsque le désaccord de phase contra-directionnel (δ) est nul. En revanche, nous démontrons maintenant le résultat lorsque le désaccord de phase contra-directionnel est nul :

$$\delta = \beta_1 - \beta_B = 0, \quad (\text{III.81a})$$

$$\beta_1 = \beta_B = \frac{\pi}{\Lambda_z}. \quad (\text{III.81b})$$

Nous introduisons ensuite la valeur de la composante selon Oz du vecteur d'onde de l'onde de référence et de l'onde diffractée dans l'hologramme 2D (β_1) de l'équation (II.17) du chapitre II, dans l'équation (III.97.b) ci-dessus. On obtient ainsi :

$$\beta_1 = \beta_B = \frac{\pi}{\Lambda_z} = k_{R_1} \cos(\theta_{R_1}^+) \quad (\text{III.81c})$$

On déduit alors de cette dernière équation l'angle de Bragg de l'onde de référence interne relié au réseau en réflexion distribuée, lorsque la condition de Bragg est satisfaite :

$$\theta_{R_1}^{+ \text{ Bragg } Z} = \arccos\left(\frac{\lambda_0}{2n_m\Lambda_z}\right) \quad (\text{III.81d})$$

D'après la loi de la réfraction de Snell-Descartes, l'angle d'incidence de Bragg de l'onde de référence incidente sur l'hologramme 2D relatif au réseau en réflexion distribuée vaut alors :

$$\theta_{R_0}^{+ \text{ Bragg } Z} = \arcsin\left[\frac{n_m \sin(\theta_{R_1}^{+ \text{ Bragg } Z})}{n_0}\right]. \quad (\text{III.81e})$$

Dans ce qui suit, nous traçons les courbes des coefficients énergétiques de diffraction et de réflexion en fonction de la longueur d'onde de l'onde de référence incidente sur l'hologramme 2D.

III.2.1. RÉPONSES SPECTRALES

Dans cette expérience, nous faisons varier la longueur d'onde de l'onde de référence incidente en traçant les courbes de coefficients de diffraction et de réflexion énergétique et en fixant tous les autres paramètres caractéristiques de l'hologramme 2D. On considère ici que l'onde de référence arrive sur l'hologramme 2D avec un angle d'incidence proche de l'angle de Bragg du réseau en transmission. Les paramètres de modélisation que nous avons utilisés sont :

$0,4 \mu m \leq \lambda_0 \leq 0,8 \mu m$ $pas = 0,001 \mu m$	$\varepsilon'_m = 2,25$ $n_m = 1,5$	$n_0 = 1$ $n_2 = 1$	$\varepsilon''_m = 0$	$\varepsilon'_{1x} = 0,02$ $\varepsilon''_{1x} = 0$
$\varepsilon'_{1z} = 0,02$ $\varepsilon''_{1z} = 0$	$L = 50 \mu m$	$\psi''_x = 20^\circ$ $\psi'_z = 30^\circ, \psi''_z = 40^\circ$	$\theta_{R_0}^+ = 18,36^\circ$	$\Lambda_x = 1 \mu m$ $\Lambda_z = 0,25 \mu m$

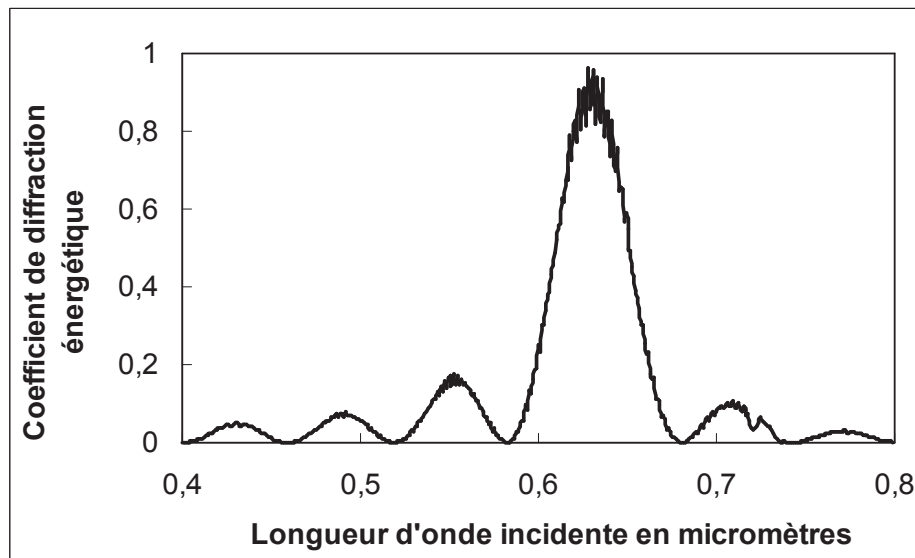


Fig. III.5 : Coefficient de diffraction énergétique en fonction de la longueur d'onde incidente

On remarque sur la figure III.5 que la courbe du coefficient de diffraction énergétique de l'onde de référence possède une valeur maximal (de l'ordre 87%) pour une longueur d'onde de Bragg reliée au réseau en transmission par :

$$\lambda_0^{\text{Bragg}^X} = 2 \Lambda_x n_0 \sin(\theta_{R_0}^+) = 0,63 \mu m, \quad (\text{III.82})$$

où $\Lambda_x, n_0, \theta_{R_0}^+$ sont respectivement la période spatiale du réseau en transmission, l'indice de réfraction du milieu incident et l'angle d'incidence de l'onde de référence sur l'hologramme 2D.

En revanche, dans cette même condition d'expérience (mêmes paramètres de calcul), le coefficient de réflexion énergétique (Fig. III.6), possède une valeur maximale à une longueur d'onde spécifique.

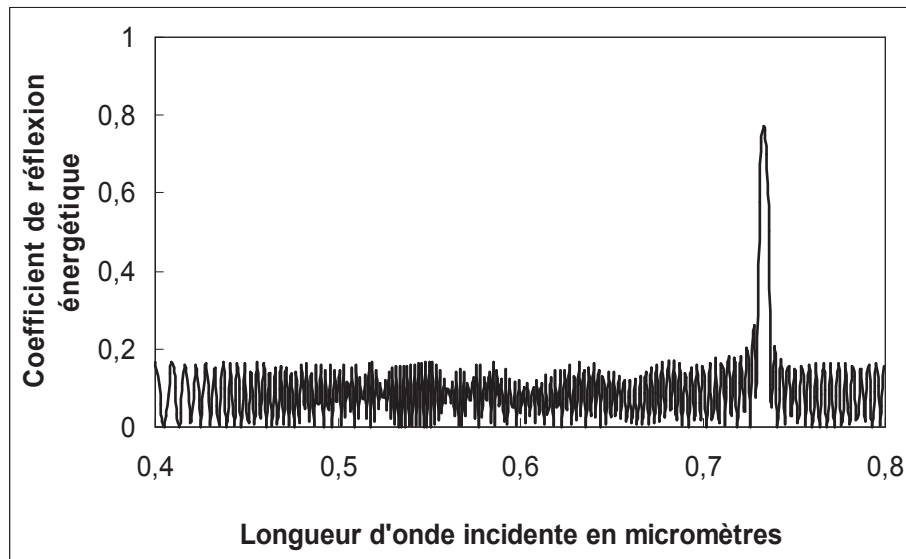


Fig. III.6 : Coefficient de réflexion énergétique en fonction de la longueur d'onde incidente

Nous vérifions que la valeur de la longueur d'onde spécifique (où le coefficient de réflexion énergétique correspondant est maximal) est obtenue par la relation :

$$\lambda_0^{\text{Bragg}^Z} = 2 \Lambda_z n_m \cos(\theta_{R_1}^+) = 0,73 \mu m. \quad (\text{III.83})$$

où $\Lambda_z, n_m, \theta_{R_1}^+$ sont respectivement la période spatiale du réseau en réflexion distribuée, l'indice de réfraction moyen de l'hologramme 2D et l'angle de l'onde de référence interne dans l'hologramme 2D. Cette longueur d'onde incidente est donc reliée au réseau en réflexion distribuée.

On retient de ces résultats expérimentaux deux points :

- La proportion d'onde réfléchi en sortie de l'hologramme 2D est importante lorsque les propriétés caractéristiques de l'onde de référence incidente sont en accord et en relation avec les propriétés caractéristiques du réseau en réflexion distribuée.

➤ La proportion d'onde diffractée en sortie de l'hologramme 2D est importante lorsque les propriétés caractéristiques de l'onde de référence incidente sont en accord et en relation avec les propriétés caractéristiques du réseau en transmission.

Nous étudions ensuite ces mêmes coefficients pour une variation angulaire de l'onde de référence incidente sur l'hologramme 2D.

III.2.2. RÉPONSES ANGULAIRES

Dans cette expérience, nous faisons varier l'angle d'incidence de l'onde optique de référence incidente sur l'hologramme 2D, de longueur d'onde incidente fixée, et étudions l'évolution des coefficients énergétiques de diffraction et de réflexion énergétique. Les paramètres du calcul sont :

$\lambda_0 = 0,632 \mu m$	$\varepsilon'_m = 2,25$ $n_m = 1,5$	$n_0 = 1$ $n_2 = 1$	$\varepsilon''_m = 0$	$\varepsilon'_{1x} = 0,02$ $\varepsilon''_{1x} = 0$
$\varepsilon'_{1z} = 0,02$ $\varepsilon''_{1z} = 0$	$L = 50 \mu m$	$\psi''_x = 20^\circ$ $\psi'_z = 30^\circ, \psi''_z = 40^\circ$	$0^\circ \leq \theta_{R_0}^+ \leq 90^\circ$ $pas = 0,1^\circ$	$\Lambda_x = 1 \mu m$ $\Lambda_z = 0,25 \mu m$

Nous commençons par le coefficient de diffraction énergétique en fonction de l'angle d'incidence (Fig. III.7).

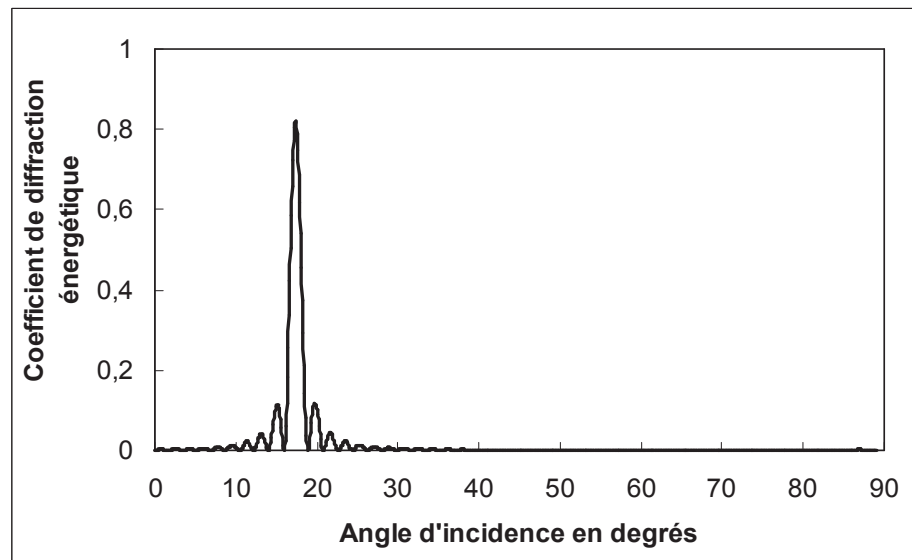


Fig. III.7 : Coefficient de diffraction énergétique en fonction de l'angle d'incidence de l'onde de référence incidente sur l'hologramme 2D $\theta_{R_0}^+$

On observe sur la figure III.7 que le coefficient de diffraction énergétique de l'onde de référence possède une valeur maximale pour un angle d'incidence égal à l'angle de Bragg du réseau

en transmission ($\theta_{R_0}^{+ \text{ Bragg} X}$). Rappelons que cet angle de Bragg est obtenu lorsque le désaccord de phase co-directionnel est nul. Il est alors donné par la relation :

$$\theta_{R_0}^{+ \text{ Bragg} X} = \arcsin \left[\frac{n_m \sin(\theta_{R_1}^{+ \text{ Bragg} X})}{n_0} \right], \quad (\text{III.84.a})$$

où

$$\theta_{R_1}^{+ \text{ Bragg} X} = \arcsin \left(\frac{\lambda_0}{2 n_m \Lambda_x} \right). \quad (\text{III.84.b})$$

Pour les valeurs de paramètres choisis, on obtient la valeur de l'angle d'incidence de Bragg de l'onde optique de référence incidente : $\theta_{R_0}^{+ \text{ Bragg} X} = 18,4^\circ$.

En revanche, dans ces mêmes conditions (mêmes paramètres de calcul), le coefficient de réflexion énergétique présente une valeur maximale pour un autre angle d'incidence (Fig. III.8).

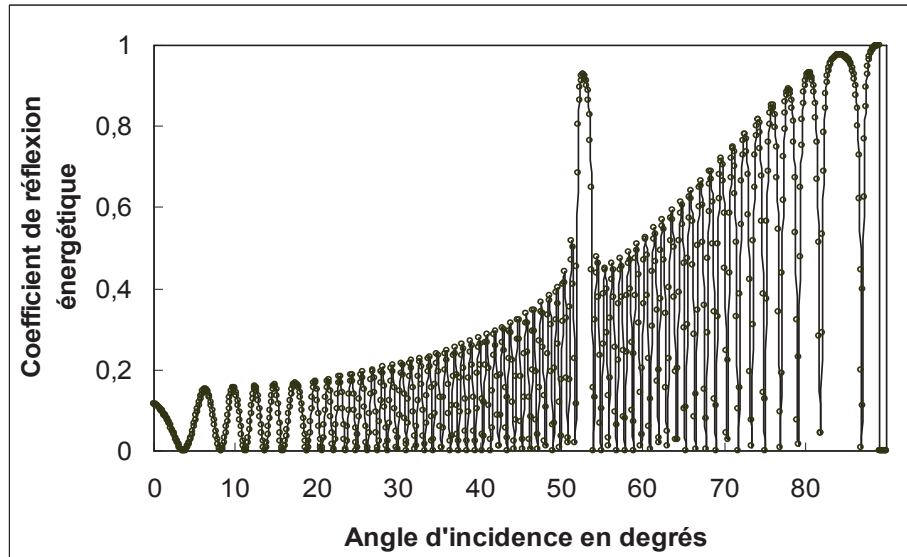


Fig. III.8 : Coefficient de réflexion énergétique en fonction de l'angle d'incidence de l'onde de référence incidente sur l'hologramme 2D $\theta_{R_0}^{+}$

Nous vérifions que ce second angle particulier est obtenu lorsque le désaccord de phase contra-directionnel est nul :

$$\theta_{R_0}^{+ \text{ Bragg} Z} = \arcsin \left[\frac{n_m \sin(\theta_{R_1}^{+ \text{ Bragg} Z})}{n_0} \right], \quad (\text{III.85.a})$$

où

$$\theta_{R_1}^{+ \text{ Bragg} Z} = \arccos \left(\frac{\lambda_0}{2 n_m \Lambda_z} \right) \quad (\text{III.85.b})$$

Pour des valeurs de paramètres choisis, on obtient que l'angle de Bragg de l'onde de référence interne à l'intérieur de l'hologramme 2D (relié au réseau en réflexion distribuée) vaille $\theta_{R_1}^{+ \text{ Bragg } Z} = 32,57^\circ$. L'angle correspondant lorsque l'onde optique de référence arrive du milieu incident (extérieur) vers l'hologramme 2D vaut $\theta_{R_0}^{+ \text{ Bragg } Z} = 53,86^\circ$.

III.2.3. RÉPONSES EN FONCTION DES PARAMÈTRES COUPLONIQUES

A. DÉSACCORD DE PHASE CO-DIRECTIONNEL NORMALISÉ

Traçons les variations du coefficient de diffraction énergétique, et de réflexion en fonction du désaccord de phase co-directionnel normalisé ΔL d'une onde de référence incidente sur l'hologramme bidimensionnel placé en cavité, de longueur d'onde donnée fixé. Les paramètres du calcul sont :

$\lambda_0 = 0,632 \mu m$	$\varepsilon'_m = 2,25$ $n_m = 1,5$	$n_0 = 1$ $n_2 = 1$	$\varepsilon''_m = 0$	$\varepsilon'_{1x} = 0,02$ $\varepsilon''_{1x} = 0$
$\varepsilon'_{1z} = 0,02$ $\varepsilon''_{1z} = 0$	$L = 50 \mu m$	$\psi''_x = 20^\circ$ $\psi'_z = 30^\circ, \psi''_z = 40^\circ$	$0^\circ \leq \theta_{R_0}^+ \leq 90^\circ$ $pas = 0,1^\circ$	$\Lambda_x = 1 \mu m$ $\Lambda_z = 0,25 \mu m$

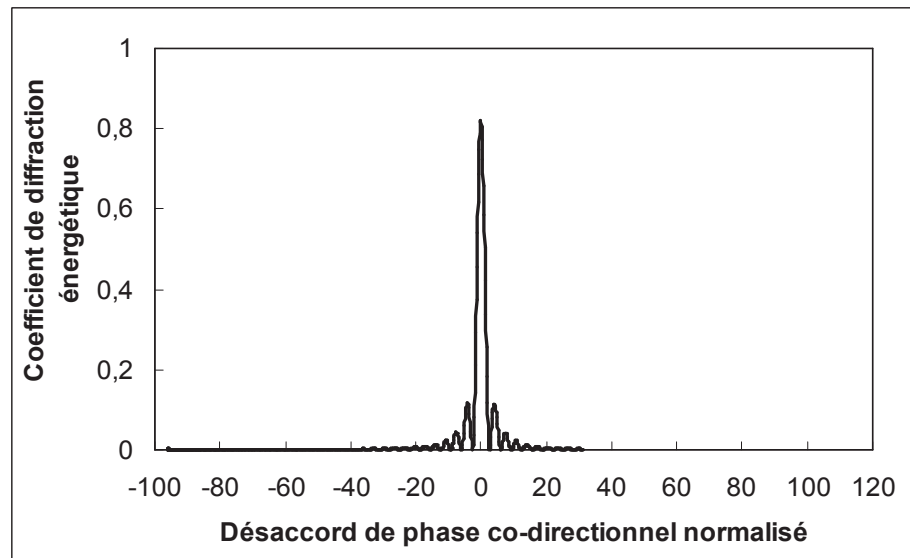


Fig. III.9 : Coefficient de diffraction énergétique en fonction du désaccord de phase co-directionnel normalisé ΔL

On observe que le coefficient de diffraction énergétique possède une valeur maximale lorsque le désaccord de phase co-directionnel normalisé est nul (Fig. III.9). Nous notons également que l'échange énergétique entre l'onde de référence interne et l'onde diffractée interne à l'intérieur de l'hologramme est efficace lorsque le désaccord de phase co-directionnel normalisé est nul. Ici c'est l'onde diffractée qui est favorisée en récupérant une proportion importante de l'énergie de l'onde de référence incidente sur l'hologramme 2D.

En revanche, le coefficient de réflexion énergétique (Fig. III.10) présente une valeur maximale (de l'ordre de 90 %) pour un désaccord de phase co-directionnel normalisé spécifique.

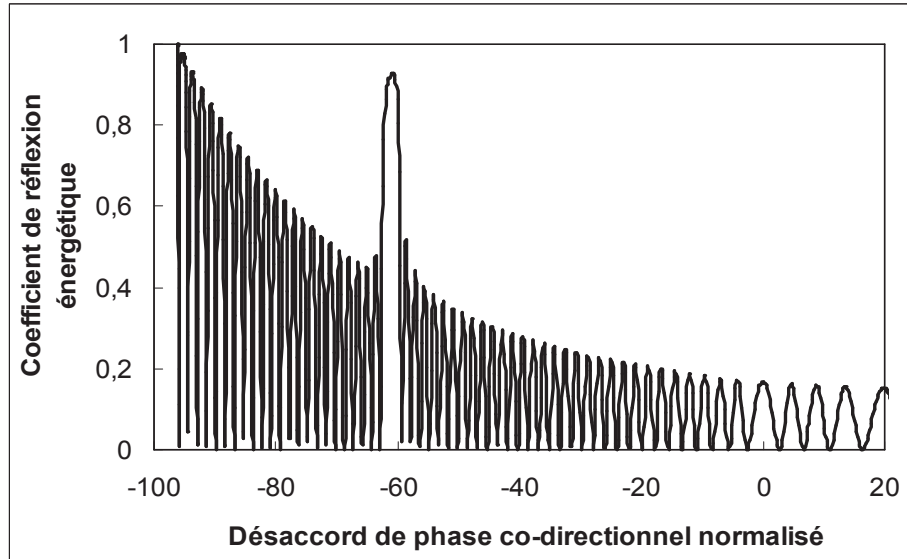


Fig. III.10 : Coefficient de réflexion énergétique en fonction du désaccord de phase co-directionnel normalisé ΔL

Nous vérifions alors l'origine de ce désaccord de phase co-directionnel spécifique. Pour une onde optique de référence de longueur d'onde $0,632 \mu m$ arrivant avec un angle d'incidence égal à l'angle de Bragg du réseau en réflexion distribuée ($\theta_{R_0}^{+ \text{ Bragg } Z} = 53,86^\circ$) sur l'hologramme 2D, d'épaisseur $L = 50 \mu m$, d'indice de réfraction moyen 1,5, où la période spatiale du réseau en transmission vaut $\Lambda_x = 1 \mu m$, on obtient une valeur spécifique du désaccord de phase co-directionnel normalisé qui vaut :

$$\Delta L = (K_x(K_x - 2\gamma_x)/4\beta_1) L, \quad (\text{III.87.a})$$

$$\Delta L = \left[(2\pi/\Lambda_x) \left[(2\pi/\Lambda_x) - 2n_m k_0 \sin(\theta_{R_1}^+) \right] / (4n_m k_0 \cos(\theta_{R_1}^+)) \right] L = -61. \quad (\text{III.87.b})$$

B. DÉSACCORD DE PHASE CONTRA-DIRECTIONNEL NORMALISÉ

Nous étudions de même les coefficients de diffraction énergétique et de réflexion énergétique en fonction du désaccord de phase contra-directionnel normalisé δL d'une onde de référence incidente, de longueur d'onde fixée, et en fixant tous les autres paramètres. Les paramètres du calcul sont :

$\lambda_0 = 0,632 \mu m$	$\varepsilon'_m = 2,25$ $n_m = 1,5$	$n_0 = 1$ $n_2 = 1$	$\varepsilon''_m = 0$	$\varepsilon'_{1x} = 0,02$ $\varepsilon''_{1x} = 0$
$\varepsilon'_{1z} = 0,02$ $\varepsilon''_{1z} = 0$	$L = 50 \mu m$	$\psi''_x = 20^\circ$ $\psi'_z = 30^\circ, \psi''_z = 40^\circ$	$0^\circ \leq \theta_{R_0}^+ \leq 90^\circ$ $pas = 0,1^\circ$	$\Lambda_x = 1 \mu m$ $\Lambda_z = 0,25 \mu m$

Nous traçons dans un premier temps le coefficient de diffraction énergétique en fonction du désaccord de phase contra-directionnel normalisé (Fig. III.11) :

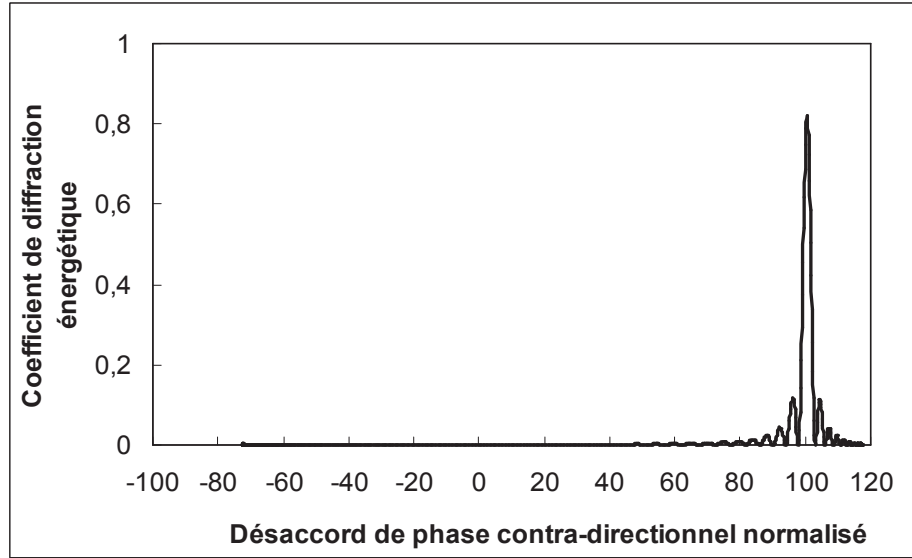


Fig. III.11 : Coefficient de diffraction énergétique en fonction du désaccord de phase contra-directionnel normalisé δL

On remarque sur la courbe que le coefficient de diffraction énergétique possède une valeur maximale correspondant à une valeur du désaccord de phase contra-directionnel qui vaut 100 (Fig. III.11). Nous vérifions alors que cette valeur du désaccord de phase contra-directionnel est obtenue lorsqu'on prend les valeurs : pour une onde de référence de longueur d'onde $0,632 \mu\text{m}$ arrivant avec un angle d'incidence proche de l'angle de Bragg du réseau en transmission ($\theta_{R_0}^+ = 18,36^\circ$) sur l'hologramme 2D d'épaisseur $L = 50 \mu\text{m}$, d'indice de réfraction moyen 1,5, et où la période spatiale du réseau en réflexion distribuée vaut $\Lambda_z = 0,25 \mu\text{m}$, la valeur du désaccord de phase contra-directionnel normalisé est donnée par :

$$\delta L = (\beta_1 - \beta_B) L, \quad (\text{III.88.a})$$

$$\delta L = \left(n_m k_0 \cos(\theta_{R_1}^+) - (\pi/\Lambda_z) \right) L = 100. \quad (\text{III.88.b})$$

On déduit alors de ce résultat que le coefficient de diffraction de l'onde de référence est toujours maximal lorsque l'onde de référence arrive avec un angle d'incidence proche ou égal à l'angle de Bragg du réseau en transmission.

On observe sur la figure III.12 un domaine où le coefficient de réflexion énergétique est maximal. Le maximum du coefficient de réflexion est centré sur une valeur nulle du désaccord de phase contra-directionnel. Nous notons que lorsque le désaccord de phase contra-directionnel est nul, l'onde de référence interne et l'onde de référence réfléchie interne se propagent avec la même vitesse de phase dans l'hologramme 2D, et sont donc en accord de phase. L'échange énergétique entre ces deux ondes est donc efficace lorsque la condition de Bragg est satisfaite.

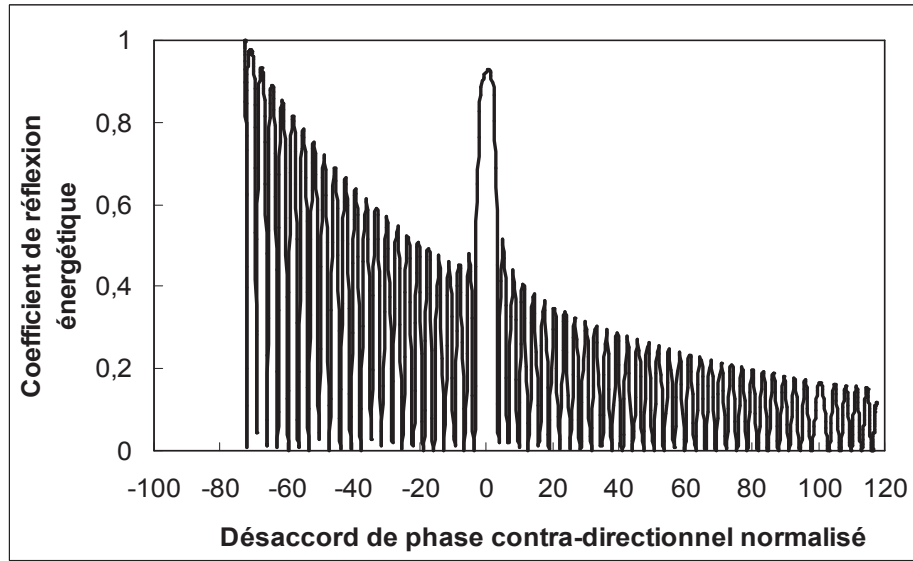


Fig. III.12 : Coefficient de réflexion énergétique en fonction du désaccord de phase contra-directionnel normalisé δL

C. COEFFICIENT DE COUPLAGE CO-DIRECTIONNEL NORMALISÉ

Dans ce paragraphe, nous traçons dans une même figure, le coefficient de diffraction énergétique, et celle du coefficient de transmission énergétique en fonction du coefficient de couplage co-directionnel normalisé $\chi_s L$ d'une onde de référence incidente sur l'hologramme 2D, de longueur d'onde fixé, polarisée dans l'état TE arrivant avec un angle d'incidence proche de l'angle de Bragg du réseau en transmission. Les paramètres du calcul sont :

$\lambda_0 = 0,632 \mu m$	$\epsilon'_m = 2,25$ $n_m = 1,5$	$n_0 = 1$ $n_2 = 1$	$\epsilon''_m = 0$	$0 \leq \epsilon'_{1x} \leq 0,1$ $pas = 0,0001$ $\epsilon''_{1x} = 0$
$\epsilon'_{1z} = 0,02$ $\epsilon''_{1z} = 0$	$L = 50 \mu m$	$\psi''_x = 20^\circ$ $\psi'_z = 30^\circ, \psi''_z = 40^\circ$	$\theta_{R_0}^+ = 18,36^\circ$	$\Lambda_x = 1 \mu m$ $\Lambda_z = 0,25 \mu m$

Le coefficient de transmission énergétique est représenté sur la figure III.13 par la courbe notée (T) et le coefficient de diffraction énergétique est représenté par la courbe notée (T_d). On remarque que lorsque le coefficient de couplage co-directionnel normalisé est nul, le coefficient de diffraction énergétique s'annule et l'onde de référence incidente sur l'hologramme 2D est totalement transmise.

L'interaction entre l'onde de référence interne et l'onde diffractée interne, dans l'hologramme 2D, par l'intermédiaire du coefficient de couplage co-directionnel est mise en évidence. L'onde de référence interne et l'onde diffractée interne sont couplées à l'intérieur de l'hologramme 2D via l'amplitude de modulation de la partie réelle de permittivité diélectrique selon l'axe (Ox) du réseau en transmission. Ces deux ondes échangent donc de l'énergie de façon

périodique. En revanche le couplage énergétique entre ces deux ondes à l'intérieur de l'hologramme 2D n'est pas total.

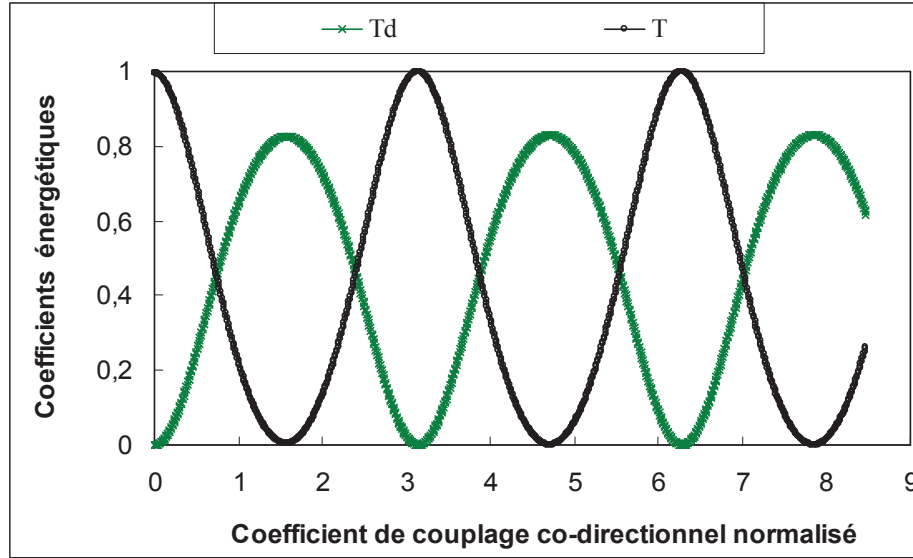


Fig. III.13 : Coefficients de diffraction énergétique (T_d) et de transmission énergétique (T) en fonction du coefficient de couplage co-directionnel normalisé

Ce résultat de simulation est similaire à celle que nous l'avons vu dans la variation du coefficient de couplage co-directionnel dans le cas de l'hologramme 1D.

D. COEFFICIENT DE COUPLAGE CONTRA-DIRECTIONNEL NORMALISÉ

Parallèlement, nous traçons sur une même figure les courbes du coefficient de réflexion énergétique et du coefficient de transmission énergétique en fonction du coefficient de couplage contra-directionnel normalisé ($\kappa_s L$), d'une onde de référence incidente sur l'hologramme bidimensionnel, de longueur d'onde fixé, polarisée dans l'état TE, arrivant ici avec un angle d'incidence proche de l'angle de Bragg du réseau en réflexion distribuée. Les paramètres du calcul sont :

$\lambda_0 = 0,632 \mu m$	$\epsilon'_m = 2,25$ $n_m = 1,5$	$n_0 = 1$ $n_2 = 1$	$\epsilon''_m = 0$	$\epsilon'_{1x} = 0,02$ $\epsilon''_{1x} = 0$
$0 \leq \epsilon'_{1z} \leq 0,1$ $pas = 0,0001$ $\epsilon''_{1z} = 0$	$L = 50 \mu m$	$\psi''_x = 20^\circ$ $\psi'_z = 30^\circ, \psi''_z = 40^\circ$	$\theta_{R_0}^+ = 54,5^\circ$	$\Lambda_x = 1 \mu m$ $\Lambda_z = 0,25 \mu m$

Les coefficients de transmission énergétique et réflexion énergétique sont représentées sur la figure III.14 par les courbes notées respectivement (T) et (R).

Le coefficient de réflexion énergétique vaut de l'ordre de 38 % même si le coefficient de couplage contra-directionnel normalisé est nul. On peut expliquer ce résultat le faite

que l'indice de réfraction moyen de l'hologramme 2D est différent des indices de réfraction des milieux qui l'entourent et qu'il s'y produit donc des réflexions partielles de l'onde de référence à chaque passage de cette onde aux interfaces (effets de bords).

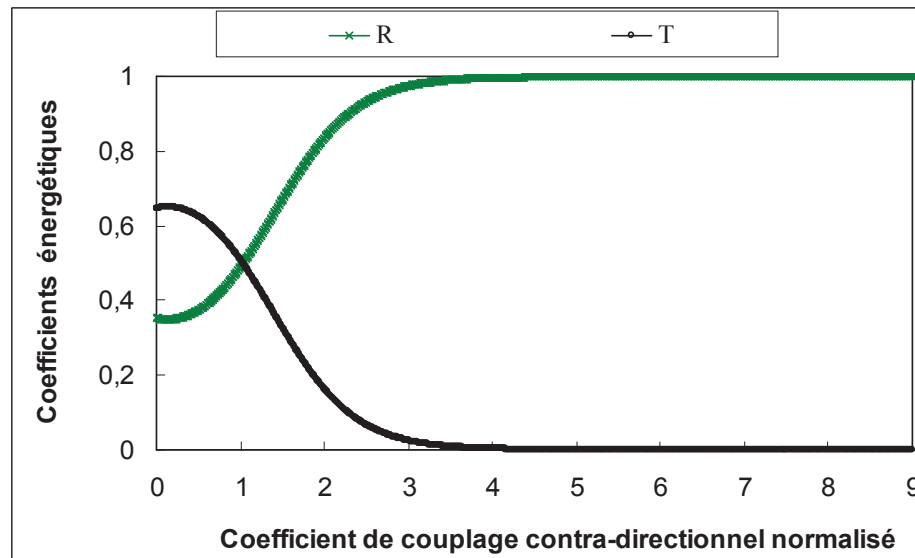


Fig. III.14 : Coefficients de réflexion énergétique (R) et de transmission énergétique (T) en fonction du coefficient de couplage contra-directionnel

L'interaction entre l'onde de référence interne et l'onde de référence réfléchie interne dans l'hologramme via le coefficient de couplage contra-directionnel est mise en évidence. L'onde de référence interne et l'onde de référence réfléchie interne sont couplées à l'intérieur de l'hologramme 2D via l'amplitude de modulation de la partie réelle de permittivité diélectrique selon l'axe (Oz) du réseau en réflexion distribuée. Ces deux ondes échangent donc de l'énergie à l'intérieur de l'hologramme 2D.

En revanche, ce résultat de simulation est nouveau par rapport au résultat obtenu dans le chapitre précédent de l'hologramme 1D. Il est relié notamment à la présence du réseau en réflexion distribuée dans l'hologramme 2D.

III.2.4. RÉPONSES EN FONCTION DES PARAMÈTRES STRUCTURELS

A. ÉPAISSEUR DE L'HOLOGRAMME 2D

Dans cette expérience, nous faisons varier l'épaisseur L de l'hologramme 2D, puis nous traçons dans une première partie, le coefficient de diffraction pour une onde de référence, polarisée dans l'état TE, arrivant avec un angle d'incidence proche de l'angle de Bragg du réseau en transmission sur l'hologramme 2D, puis de l'angle de Bragg du réseau en réflexion.

Tout d'abord, considérons le cas où l'onde de référence incidente sur l'hologramme 2D arrive ici avec un angle d'incidence proche de l'angle de Bragg du réseau en transmission, avec les paramètres de calcul suivants :

$\lambda_0 = 0,632 \mu m$	$\varepsilon'_m = 2,25$ $n_m = 1,5$	$n_0 = 1$ $n_2 = 1$	$\varepsilon''_m = 0$	$\varepsilon'_{1x} = 0,02$ $\varepsilon''_{1x} = 0$
$\varepsilon'_{1z} = 0,02$ $\varepsilon''_{1z} = 0$	$1 \mu m \leq L \leq 600 \mu m$ $pas = 1 \mu m$	$\psi''_x = 20^\circ$ $\psi'_z = 30^\circ, \psi''_z = 40^\circ$	$\theta_{R_0}^+ = 18,36^\circ$	$\Lambda_x = 1 \mu m$ $\Lambda_z = 0,25 \mu m$

Le coefficient de diffraction énergétique de l'onde de référence incidente évolue de façon périodique lorsqu'on fait varier l'épaisseur de l'hologramme 2D (Fig. III.15).

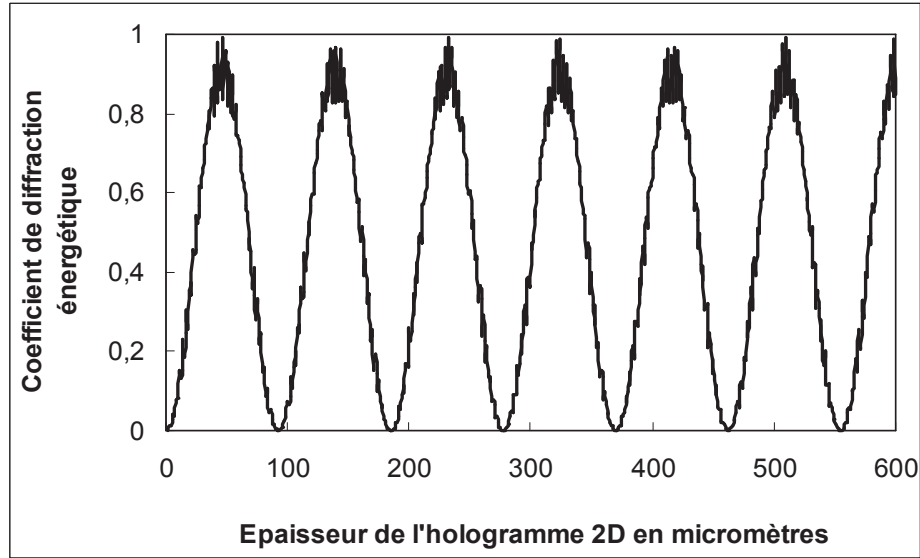


Fig. III.15 : Coefficient de diffraction énergétique en fonction de l'épaisseur de l'hologramme

Lorsque l'onde optique de référence incidente arrive avec un angle d'incidence égal à l'angle de Bragg du réseau en transmission, dans ce cas là, on obtient une variation du coefficient de diffraction énergétique en fonction de l'épaisseur de l'hologramme 2D similaire à la variation de ce même coefficient en fonction de l'épaisseur de l'hologramme 1D (chapitre II).

Dans un second temps, traçons la courbe du coefficient de réflexion énergétique pour une onde de référence, polarisée dans l'état TE et arrivant avec un angle d'incidence proche de l'angle de Bragg du réseau en réflexion distribuée, avec :

$\lambda_0 = 0,632 \mu m$	$\varepsilon'_m = 2,25$ $n_m = 1,5$	$n_0 = 1$ $n_2 = 1$	$\varepsilon''_m = 0$	$\varepsilon'_{1x} = 0,02$ $\varepsilon''_{1x} = 0$
$\varepsilon'_{1z} = 0,02$ $\varepsilon''_{1z} = 0$	$1 \mu m \leq L \leq 600 \mu m$ $pas = 1 \mu m$	$\psi''_x = 20^\circ$ $\psi'_z = 30^\circ, \psi''_z = 40^\circ$	$\theta_{R_0}^+ = 54,5^\circ$	$\Lambda_x = 1 \mu m$ $\Lambda_z = 0,25 \mu m$

Ici encore, le coefficient de réflexion énergétique de l'onde de référence incidente évolue de façon périodique lorsqu'on varie l'épaisseur de l'hologramme 2D (Fig. III.16). La valeur du coefficient de réflexion énergétique reste grande (~93%) sur une plus large gamme d'épaisseurs.

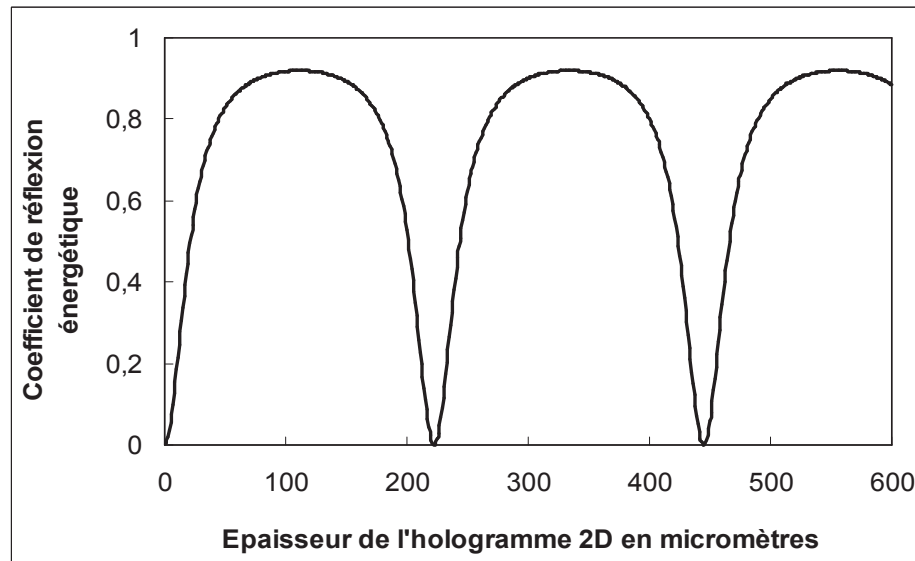


Fig. III.16 : Coefficient de réflexion énergétique en fonction de l'épaisseur de l'hologramme

En revanche, lorsque l'onde optique de référence incidente arrive avec un angle d'incidence égal à l'angle de Bragg du réseau en réflexion distribuée, dans ce cas là, on obtient un résultat nouveau par rapport à celui montré dans le chapitre précédent de l'hologramme 1D. Puisque, ce coefficient de réflexion énergétique manifeste une bande interdite photonique, due à la présence du réseau en réflexion distribuée dans l'hologramme 2D.

B. PÉRIODE SPATIALE DU RÉSEAU EN TRANSMISSION

Dans cette expérience, nous faisons varier la période spatiale Λ_x du réseau en transmission, puis nous traçons la variation du coefficient de diffraction énergétique pour une onde de référence de longueur d'onde fixé, polarisée dans l'état TE, et arrivant sur l'H2D avec un angle d'incidence proche de l'angle de Bragg du réseau en transmission. Les paramètres du calcul sont :

$\lambda_0 = 0,632 \mu m$	$\epsilon'_m = 2,25$ $n_m = 1,5$	$n_0 = 1$ $n_2 = 1$	$\epsilon''_m = 0$	$\epsilon'_{1x} = 0,02$ $\epsilon''_{1x} = 0$
$\epsilon'_{1z} = 0,02$ $\epsilon''_{1z} = 0$	$L = 50 \mu m$	$\psi''_x = 20^\circ$ $\psi'_z = 30^\circ, \psi''_z = 40^\circ$	$\theta_{R_0}^+ = 18,36^\circ$	$0,5 \mu m \leq \Lambda_x \leq 2 \mu m$ $pas = 0,005$ $\Lambda_z = 0,25 \mu m$

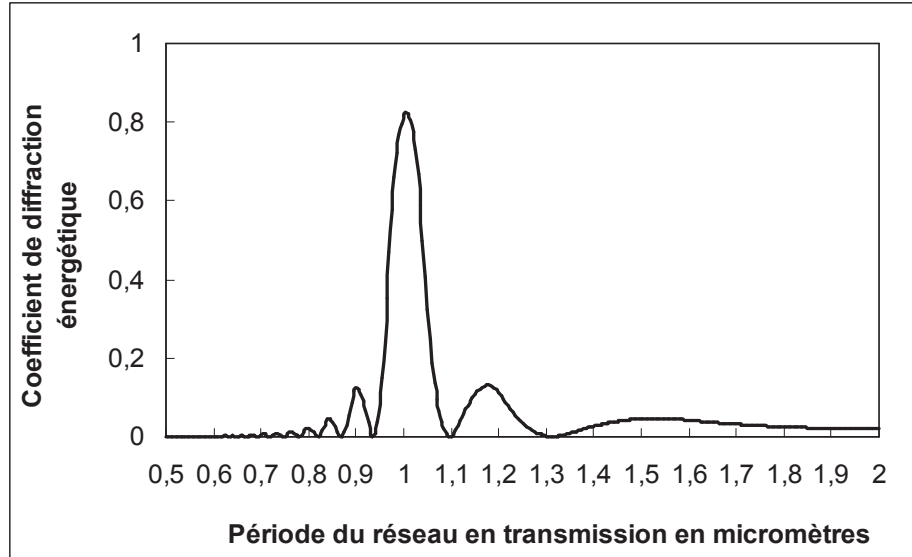


Fig. III.17 : Coefficient de diffraction en fonction de la période spatiale du réseau en transmission

On observe sur la figure III.17 que le coefficient de diffraction présente donc une valeur maximale de l'ordre 85% pour une période spatiale selon l'axe (Ox) qui vaut 1 μm . Cette période est obtenue lorsque la condition de Bragg est satisfaite :

$$\Lambda_x = \frac{\lambda_0}{2 n_0 \sin(\theta_{R_0}^+)} = 1 \mu\text{m} \quad (\text{III. 89})$$

C. PÉRIODE SPATIALE DU RÉSEAU EN RÉFLEXION DISTRIBUÉE

En vue d'étudier le coefficient de réflexion énergétique, nous faisons ensuite varier la période spatiale du réseau en réflexion distribuée. Dans cette expérience, nous faisons varier la période spatiale Λ_z du réseau en réflexion distribuée, puis nous traçons la courbe du coefficient de réflexion énergétique pour une onde de référence de longueur d'onde fixée, polarisée dans l'état TE, arrivant avec un angle d'incidence égal à l'angle de Bragg du réseau en réflexion distribuée sur l'hologramme 2D. Les paramètres du calcul sont :

$\lambda_0 = 0,632 \mu\text{m}$	$\varepsilon'_m = 2,25$ $n_m = 1,5$	$n_0 = 1$ $n_2 = 1$	$\varepsilon''_m = 0$	$\varepsilon'_{1x} = 0,02$ $\varepsilon''_{1x} = 0$
$\varepsilon'_{1z} = 0,02$ $\varepsilon''_{1z} = 0$	$L = 50 \mu\text{m}$	$\psi''_x = 20^\circ$ $\psi'_z = 30^\circ, \psi''_z = 40^\circ$	$\theta_{R_0}^+ = 54,5^\circ$	$\Lambda_x = 1 \mu\text{m}$ $0,1 \mu\text{m} \leq \Lambda_z \leq 0,5 \mu\text{m}$ $pas = 0,001 \mu\text{m}$

Le coefficient de réflexion énergétique se manifeste et est maximal pour une période spatiale spécifique du réseau en réflexion distribuée qui vaut 0,25 μm (Fig. III.18).

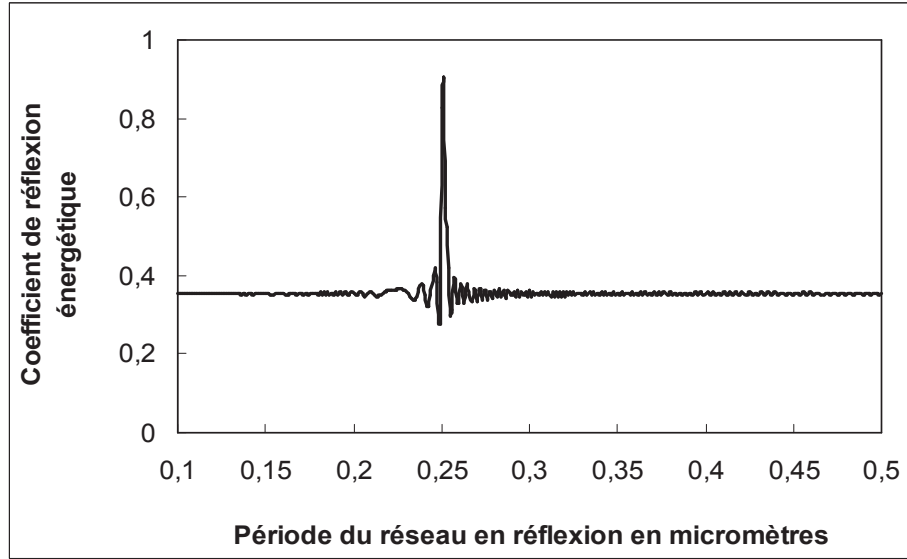


Fig. III.18 : Coefficient de réflexion énergétique en fonction de la période spatiale du réseau en réflexion distribuée

On vérifie alors que cette période spatiale (où le coefficient de réflexion énergétique est maximal) est obtenue lorsque le désaccord de phase contra-directionnel δ est nul :

$$\Lambda_z = \frac{\lambda_0}{2n_m \cos(\theta_{R_1}^+)} = 0,25 \mu m \quad (\text{III. 90})$$

III.3. CAS OU LES DEUX CONDITIONS DE BRAGG COÏNCIDENT

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons au cas où on effectue la superposition de la zone de la diffraction maximale du réseau de diffraction en transmission avec la bande interdite photonique du réseau en réflexion distribuée, pour un même angle d'incidence qui soit l'angle de Bragg pour chacun des deux réseaux. Nous procédons d'abord à un calcul portant sur le désaccord de phase contra-directionnel δ du réseau en réflexion distribuée et le désaccord de phase co-directionnel Δ du réseau en transmission. Ces désaccords de phase doivent être nuls simultanément. Lorsque la condition de Bragg est satisfaite ($\delta = 0$ et $\Delta = 0$), on détermine la valeur de la période du réseau en réflexion distribuée et la valeur de la période du réseau en transmission. On obtient alors :

$$\delta = \beta_1 - \beta_B = 0, \quad (\text{III.91})$$

$$\beta_1 = \beta_B = \frac{\pi}{\Lambda_z}. \quad (\text{III.92})$$

et

$$\Delta = \frac{K_x(K_x - 2\gamma_x)}{4\beta_1} = 0, \quad (\text{III.93})$$

$$\Rightarrow K_x = 2 \gamma_x \text{ où } \gamma_x = \frac{\pi}{\Lambda_x}. \quad (\text{III.94})$$

En faisant un rapport sur ces deux équations, on obtient une relation qui relie les périodes de deux réseaux à l'angle de l'onde de référence réfractée interne à l'hologramme bidimensionnel, de vecteur d'onde $\vec{k}_{R_1}^+$:

$$\tan(\theta_{R_1}^{+ \text{ Bragg } X}) = \frac{\Lambda_z}{\Lambda_x}. \quad (\text{III.95})$$

À partir de cette dernière relation, on en déduit alors la période du réseau en réflexion distribuée, définit par :

$$\Lambda_z = \tan(\theta_{R_1}^{+ \text{ Bragg } X}) \Lambda_x. \quad (\text{III.96})$$

Pour des paramètres fixés, tels que la longueur d'onde incidente ($\lambda_0 = 0,632 \mu m$), la période du réseau de diffraction en transmission ($\Lambda_x = 1 \mu m$), l'indice de réfraction moyen de l'hologramme 2D ($n_m = 1,5$); l'angle de l'onde de référence interne dans l'hologramme bidimensionnel ($\theta_{R_1}^{+ \text{ Bragg } X} = 12,1238^\circ$), la période du réseau en réflexion distribuée déterminée vaut alors $\Lambda_z = 0,2148 \mu m$. L'angle de Bragg du réseau de diffraction en transmission $\theta_{R_1}^{+ \text{ Bragg } X}$ et celui du réseau en réflexion distribuée $\theta_{R_1}^{+ \text{ Bragg } Z}$ sont donc égaux ($\theta_{R_1}^{+ \text{ Bragg } X} = \theta_{R_1}^{+ \text{ Bragg } Z}$).

Dans ce qui suit, les périodes spatiales des réseaux (en transmission et en réflexion distribuée) sont choisies de telle sorte que la bande interdite photonique du réseau en réflexion distribuée et la zone de diffraction maximale du réseau en transmission se superposent. Nous choisissons également l'indice de réfraction moyen de l'hologramme 2D et les indices de réfraction respectifs aux milieux extérieurs (incident et émergent) possèdent tous les mêmes valeurs (pas d'effets de bords ou interfaces), afin d'étudier uniquement la réponse de l'hologramme 2D. Pour tous les expériences que nous ferons dans ce qui suit, on considère que l'onde optique de référence incidente sur l'hologramme est polarisée dans l'état TE.

III.3.1. INFLUENCE DU COEFFICIENT DE COUPLAGE CO-DIRECTIONNEL NORMALISÉ SUR LA RÉFLEXION

Pour ce premier calcul, la valeur du coefficient de couplage contra-directionnel est fixé tandis que le coefficient de couplage co-directionnel varie en fonction de l'amplitude de modulation de la partie réelle de permittivité diélectrique selon l'axe (Ox). Les paramètres de modélisation sont définis par :

$\lambda_0 = 0,632 \mu m$	$n_0 = 1,5$ $n_m = 1,5$	$n_2 = 1,5$	$\varepsilon_m'' = 0$	$0,01 \leq \varepsilon_{1x}' \leq 0,04$ $pas = 0,01$ $\varepsilon_{1x}'' = 0$
$\varepsilon_{1z}' = 0,01$ $\varepsilon_{1z}'' = 0$	$L = 50 \mu m$	$\psi_x'' = 20^\circ, \psi_z' = 30^\circ,$ $\psi_z'' = 40^\circ$	$0^\circ \leq \theta_{R_0}^+ \leq 88^\circ$ $pas = 0,1^\circ$	$\Lambda_x = 1 \mu m,$ $\Lambda_z = 0,2148 \mu m$

Nous traçons d'abord la courbe du coefficient de diffraction énergétique en fonction de l'angle d'incidence pour différentes valeurs du coefficient de couplage co-directionnel (Fig. III.19).

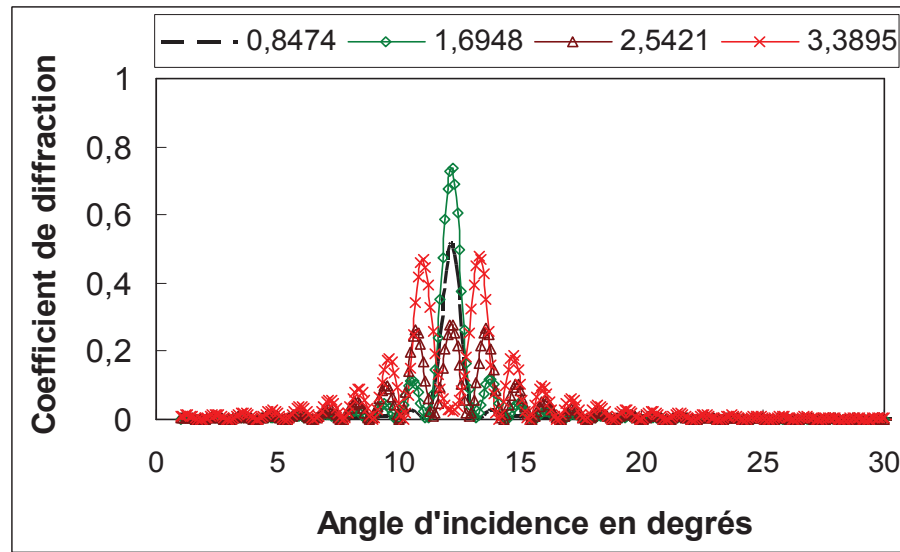


Fig. III.19 : Coefficient de diffraction énergétique en fonction de l'angle d'incidence pour différentes valeurs de $\chi_s L$

Pour chacune de ces courbes, la valeur des coefficients de diffraction est maximale pour l'angle d'incidence de Bragg commun aux deux réseaux (lorsque $\theta_{R_0}^{+ \text{ Bragg } X} = \theta_{R_0}^{+ \text{ Bragg } Z} = 12,1238^\circ$). Plus on augmente le coefficient de couplage co-directionnel normalisé, plus la valeur du coefficient de diffraction énergétique augmente (Fig. III.19). En revanche, nous ne pouvons pas continuer à augmenter cette valeur du coefficient de couplage car il existe une valeur limite à partir de laquelle le coefficient de diffraction diminue progressivement vers un état constant de faible valeur.

Nous traçons ensuite la courbe du coefficient de réflexion énergétique en fonction de l'angle d'incidence pour différents valeurs de $\chi_s L$

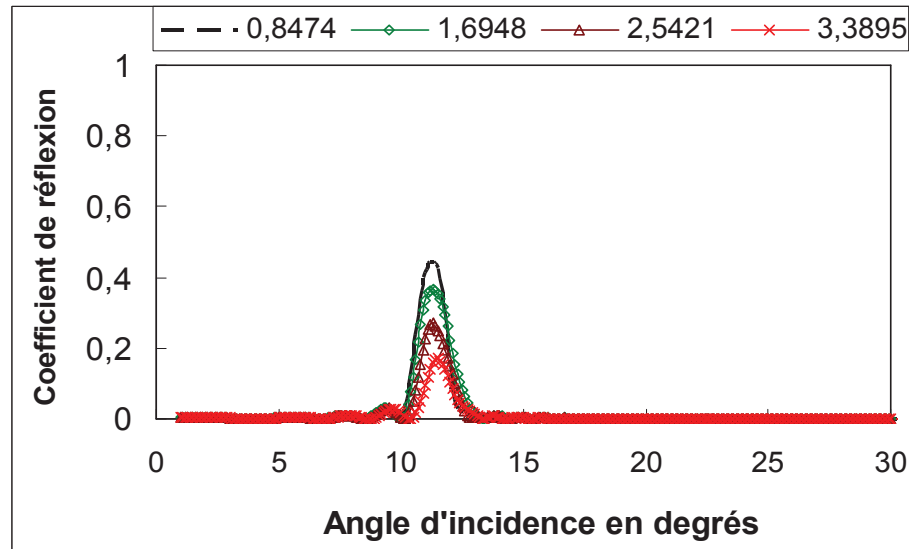


Fig. III.20 : Coefficient de réflexion énergétique en fonction de l'angle d'incidence pour différentes valeurs de $\chi_s L$

Plus on augmente la valeur du coefficient de couplage co-directionnel, plus la valeur du coefficient de réflexion énergétique diminue considérablement à l'angle d'incidence de Bragg du réseau en transmission (Fig. III.20). Pour une forte valeur de l'amplitude de modulation de permittivité diélectrique selon l'axe (Ox) ($\epsilon'_{1x} = 0,04$), la valeur du coefficient de réflexion énergétique correspondante à l'angle d'incidence de Bragg est environ de l'ordre de 2 %.

On en déduit que la réponse optique du réseau en réflexion distribuée de l'hologramme 2D est donc affaiblie (empêchée) en produisant moins d'onde réfléchie de type R^- à cause de l'augmentation du coefficient de couplage co-directionnel du réseau en transmission.

Dans ce qui suit, on regroupe dans un tableau, les valeurs des amplitudes de modulation de permittivité diélectrique selon l'axe (Ox), le coefficient de couplage co-directionnel correspondant, et la valeur du maximum du coefficient de réflexion énergétique (R) à l'angle d'incidence de Bragg.

ϵ'_{1x}	0,01	0,02	0,03	0,04
$\chi_s L$	0,8474	1,6948	2,5421	3,3895
Max (R)	0,4449	0,3649	0,2693	0,1576

Nous vérifions d'après ce tableau de valeurs ci-dessus, que le coefficient de couplage co-directionnel normalisé croît avec l'amplitude de modulation de permittivité diélectrique du réseau en transmission, tandis que la valeur du coefficient de réflexion énergétique décroît avec cette même amplitude de modulation de permittivité à l'angle d'incidence de Bragg.

Nous notons que dans cette expérience, la somme de quatre coefficients énergétique (transmission, diffraction, réflexion, et rétrodiffraction) en fonction de l'angle

d'incidence, pour ces différentes valeurs de coefficients de couplage co-directionnel vaut 1 (l'hologramme 2D ne possède pas de fond continu d'absorption ni de gain). L'énergie de l'onde de référence incidente sur l'hologramme 2D est donc conservée et les quatre coefficients énergétiques se compensent.

Nous notons également qu'il n'existe pas, dans l'hologramme 2D, de couplage croisé, c'est-à-dire un échange d'énergie ou interaction entre l'onde diffractée de type S^+ et l'onde réfléchie de type R^- , de même entre l'onde rétrodiffractée de type S^- et l'onde de référence interne de type R^+ .

Dans ce qui suit, nous étudions les coefficients énergétiques (diffraction et réflexion) tracés pour différentes valeurs de l'amplitude de modulation de la partie réelle de permittivité diélectrique selon l'axe (Oz) de l'hologramme 2D. La bande interdite photonique du réseau en réflexion distribuée est superposée à la zone de diffraction maximale du réseau en transmission.

III.3.2. INFLUENCE DU COEFFICIENT DE COUPLAGE CONTRA-DIRECTIONNEL NORMALISÉ SUR LE COEFFICIENT DE DIFFRACTION

Nous étudions maintenant les deux coefficients énergétiques (diffraction et réflexion) en fonction de l'angle d'incidence et à différentes valeurs de coefficient de couplage contra-directionnel, selon l'axe (Oz). Comme précédemment, l'angle de Bragg relié au réseau en transmission est égal à l'angle de Bragg relié au réseau en réflexion distribuée. Le coefficient de couplage co-directionnel et la longueur d'onde incidente sont fixés. Les paramètres de modélisation que nous avons utilisés sont définis par :

$\lambda_0 = 0,632 \mu m$	$n_0 = 1,5$ $n_m = 1,5$	$n_2 = 1,5$	$\varepsilon_m'' = 0$	$\varepsilon_{1x}' = 0,01$ $\varepsilon_{1x}'' = 0$
$0,01 \leq \varepsilon_{1z}' \leq 0,04$; $pas = 0,01$ $\varepsilon_{1z}'' = 0$	$L = 50 \mu m$	$\psi_x'' = 20^\circ, \psi_z' = 30^\circ$; $\psi_z'' = 40^\circ$	$0^\circ \leq \theta_{R_0}^+ \leq 88^\circ$ $pas = 0,1^\circ$	$\Lambda_x = 1 \mu m$, $\Lambda_z = 0,2148 \mu m$

Nous traçons d'abord les courbes de coefficients de diffraction énergétique en fonction de l'angle d'incidence pour différentes valeurs du coefficient de couplage contra-directionnel (Fig. III 21).

Nous remarquons que si on augmente la valeur du coefficient de couplage contra-directionnel ($\kappa_s L$), par l'intermédiaire de l'amplitude de modulation de la partie réelle de permittivité diélectrique selon (Oz) du réseau en réflexion distribuée, le coefficient de diffraction énergétique diminue progressivement et considérablement lorsque l'onde de référence arrive avec un angle d'incidence de Bragg.

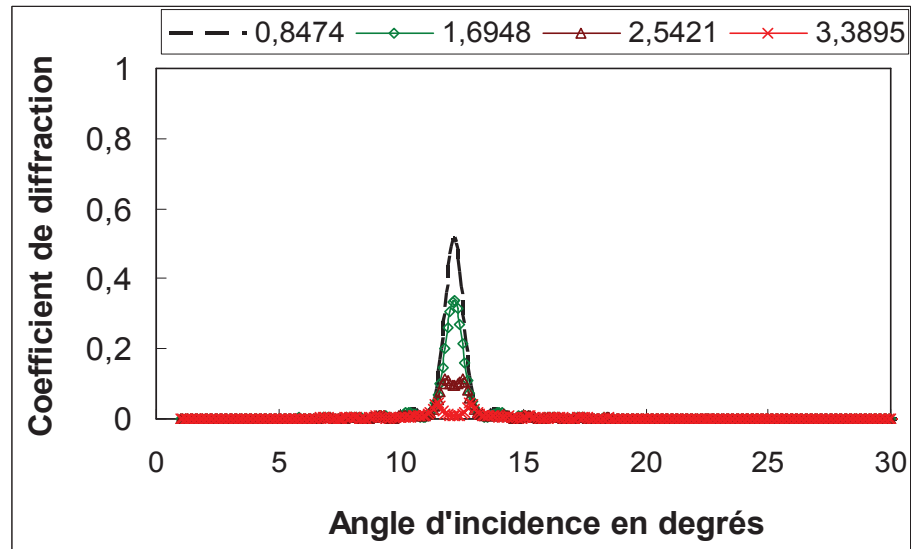


Fig. III.21 : Coefficient de diffraction énergétique en fonction de l'angle d'incidence pour différentes valeurs de $\kappa_s L$

Représentons sous forme d'un tableau, les valeurs du maximum du coefficient de diffraction énergétique (T_d) à l'angle d'incidence de Bragg en fonction de l'amplitude de modulation de la partie réelle de permittivité diélectrique selon l'axe (Oz), et le coefficient de couplage contra-directionnel normalisé :

ε'_{1z}	0,01	0,02	0,03	0,04
$\kappa_s L$	0,8474	1,6948	2,5421	3,3895
Max (T_d)	0,5126	0,3351	0,0946	0,0087

Ce tableau montre que si la valeur de l'amplitude de modulation de la partie réelle de permittivité diélectrique selon (Oz) augmente, le coefficient de diffraction énergétique à l'angle d'incidence de Bragg diminue de façon importante.

Traçons ensuite le coefficient de réflexion énergétique en fonction de l'angle d'incidence pour différentes valeurs du coefficient de couplage contra-directionnel.

Pour chacune des courbes de la figure III.22, le coefficient de réflexion énergétique est maximal à l'angle d'incidence de Bragg commun aux deux réseaux contenus dans l'hologramme 2D ($\theta_{R_0}^{+ \text{ Bragg } X} = \theta_{R_0}^{+ \text{ Bragg } Z} = 12,1238^\circ$). On remarque la présence d'une bande interdite photonique angulaire, centrée sur l'angle d'incidence de Bragg, où le coefficient de réflexion énergétique possède une forte valeur en augmentant et en s'élargissant angulairement avec le coefficient de couplage contra-directionnel normalisé.

Nous retenons ici que le coefficient de réflexion énergétique, c'est-à-dire la proportion d'onde réfléchi en sortie de l'hologramme 2D, croît avec le coefficient de couplage

contra-directionnel normalisé, via par l'amplitude de modulation de permittivité diélectrique selon (Oz), du réseau en réflexion distribuée (figure III.22). Nous notons également que la largeur de la bande interdite photonique augmente avec l'augmentation du coefficient de couplage contra-directionnel.

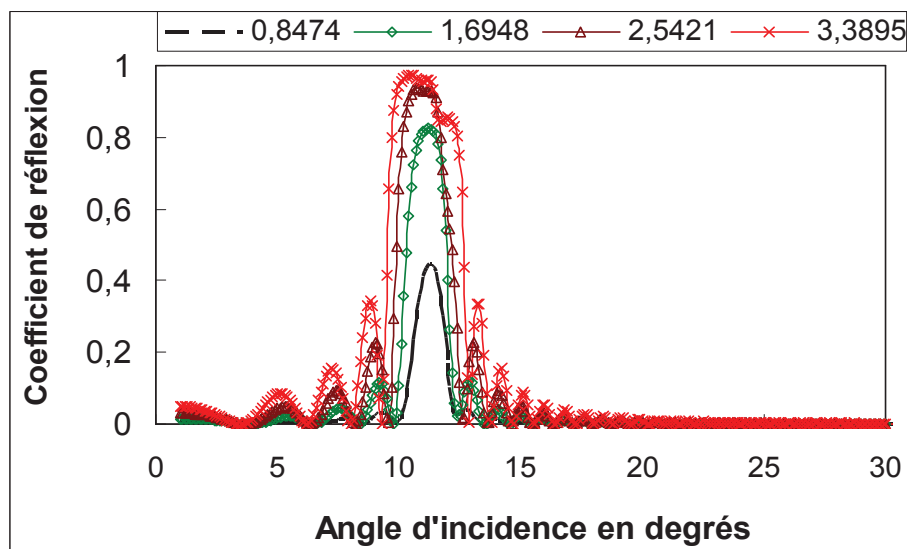


Fig. III.22 : Coefficient de réflexion énergétique en fonction de l'angle d'incidence pour différentes valeurs de $\kappa_s L$

Lors de la variation du coefficient de couplage co-directionnel du paragraphe précédent, nous avons obtenu que l'augmentation du coefficient de couplage co-directionnel normalisé entraînait une diminution de la proportion de l'onde réfléchie en sortie de l'hologramme 2D. D'une manière réciproque, on obtient ici que l'augmentation du coefficient de couplage contra-directionnel conduit une diminution considérable de la proportion d'onde diffractée en sortie de l'hologramme 2D. L'énergie incidente est conservée également ici et les 4 coefficients énergétiques se compensent.

IV. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES : VERS L'H2D ACTIF

Nous avons montré dans ce chapitre que la méthode tout-analytique à couplages d'ondes développée au chapitre II pour décrire la réponse optique d'un hologramme unidimensionnel (H1D) pouvait — sans difficulté de principe mais en nécessitant le choix de bases judicieuses de décomposition — être étendu à l'étude d'un hologramme bidimensionnel (H2D) consistant en la superposition d'un réseau en transmission et d'un réseau en réflexion distribuée.

Nous avons, par une série de simulations, mis en évidence le rôle crucial joué par les conditions de Bragg respectives de chacun de ces réseaux, et la manière dont les divers paramètres du problème, tant expérimentaux que structurels, jouent sur la vérification de ces conditions.

Un cas particulier intéressant a été abordé : la mise en coïncidence de la bande photonique interdite du réseau en réflexion distribuée et de la région de diffraction optimale du réseau en transmission, qui nécessite que les deux conditions de Bragg soient en accord. Lorsqu'une telle coïncidence est réalisée, on constate que l'augmentation de l'amplitude de modulation de la partie réelle de permittivité diélectrique réelle du réseau en transmission réduit considérablement la valeur du coefficient de réflexion, et que, réciproquement, l'augmentation de l'amplitude de modulation de la permittivité diélectrique réelle du réseau en réflexion distribuée réduit tout aussi considérablement la valeur du coefficient de diffraction. En conséquence, si l'on superpose la bande interdite photonique du réseau en réflexion distribuée à la zone de diffraction maximale du réseau en transmission, l'onde diffractée se trouve empêchée, au profit de la simple transmission. De ce fait, il est préférable de placer la zone de diffraction du réseau en transmission aux bords de la bande interdite photonique.

Le chapitre suivant va s'intéresser à une nouvelle généralisation de l'approche développée dans les deux premiers chapitres : le passage à un hologramme bidimensionnel actif, c'est-à-dire dans lequel on considère une source ponctuelle qui émet un rayonnement spontané isotrope.

CHAPITRE IV

VERS UNE EXTENSION A UN HOLOGRAMME BIDIMENSIONNEL ACTIF

I. INTRODUCTION

Le chapitre précédent nous a permis d'établir la capacité d'une approche perturbative tout-analytique, basée sur les formalismes des ondes couplées et des matrices de transfert, à décrire la réponse optique d'une structure bidimensionnelle passive dont la permittivité présente une double modulation spatiale. Dans cette approche, la structure, appelée H2D et vue comme la superposition d'un réseau de diffraction épais en transmission (dans le régime de Bragg) et d'un réseau en réflexion (un miroir distribué de Bragg), est traitée globalement, et un jeu de quelques paramètres dits couploniques, à la signification physique simple et intuitive, gouverne entièrement son comportement tant spectral qu'angulaire.

Dans ce chapitre, nous posons les bases d'une extension de cette modélisation à des structures bidimensionnelles *actives*, dans lesquelles des sources sont disséminées. Ce travail s'inscrit dans le cadre d'un effort de modélisation de structures diffractives actives, tels que des lasers à rétroaction distribuée [Kogelnik 72], qu'il est possible d'obtenir par photo-inscription de réseaux d'indice dans des matrices polymériques dopées [Réf. Laval Québec].

Les principes d'une telle extension sont exposés pour un H2D dans lequel une source, supposée ponctuelle et située à une abscisse z_P , émet de manière isotrope un rayonnement électromagnétique d'amplitude a . Le processus d'émission peut être spontané ou stimulé, et le spectre d'émission est *a priori* quelconque : le modèle permet sans difficulté de principe de généraliser le calcul à toute répartition spectrale $a(\omega)$ de l'émission de la source.

Dans un premier temps, nous déterminons soigneusement les divers chemins qui, à partir d'une émission intra-cavité isotrope, donnent naissance, pour chacune des quatre ondes sortantes, à une direction angulaire d'émission donnée. Dans un deuxième temps, nous introduisons la forme générique de la matrice de transfert d'un hologramme 2D actif, obtenue par extension et généralisation du formalisme des matrices de transfert à des matrices (5×5) prenant en compte la présence de sources [Weber 91, Boucher 06]. Enfin, nous déterminons les expressions des champs sortant de l'H2D actif, et les coefficients de répartition énergétiques qui leur sont associés.

II. ÉTUDE TOUT-ANALYTIQUE DE L'H2D ACTIF

II.1. GEOMETRIE

La figure IV.1 illustre la géométrie du problème. À une abscisse z_P (où $0 < z_P < L$) se trouve un émetteur considéré comme une source quasi-ponctuelle. Cette source émet de manière isotrope un rayonnement d'amplitude uniforme a . L'émission est ici considérée monochromatique, de pulsation ω . Comme précédemment, la structure est supposée de dimension finie L selon l'axe (Oz) et infinie (en pratique, de dimensions très supérieures à L) dans les directions (Ox) et (Oy), ce qui permet de la considérer comme invariante selon ces deux directions, et de ne repérer la source que par une unique abscisse z_P .

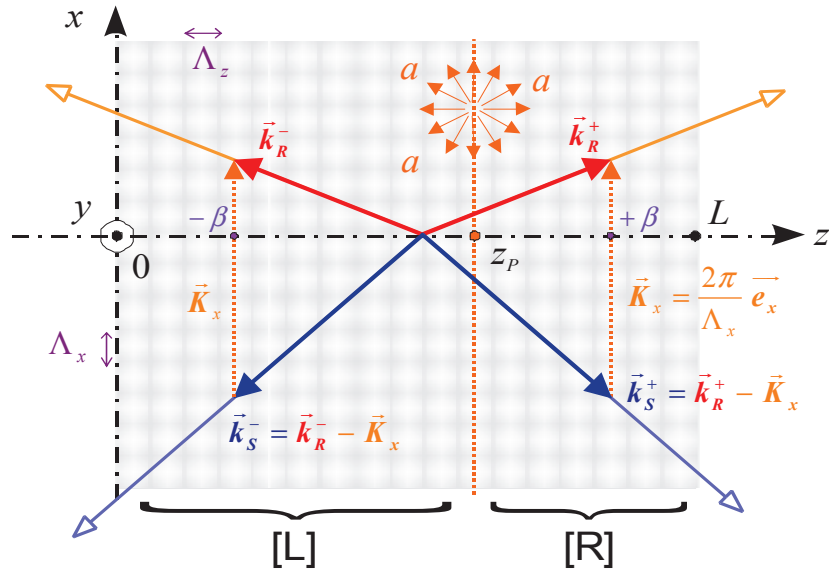


Fig. IV.1 : Source émettrice localisée en z_p émettant de manière isotrope un champ d'amplitude a

Classiquement [Kastler 62], on sait que l'émission d'un atome émetteur placé dans une cavité de Fabry-Pérot se projette sur les modes de résonance de la cavité (la fonction d'Airy). Les modes de la cavité filtrent ainsi le champs émis par la source intracavité, tant spectralement qu'angulairement. Ici, l'émission de la source quasi-ponctuelle située en $z = z_p$ se projette donc sur les modes « R » et « S » de l'hologramme 2D passif, qui constituent de la sorte quatre canaux qu'elle alimente.

On retrouve donc la géométrie du chapitre précédent, avec, pour un angle $\theta_{R_1}^+$ donné (en l'occurrence, l'un, quelconque, des angles d'émission de la source), quatre ondes de vecteurs d'onde $\vec{k}_{R_1}^+$, $\vec{k}_{R_1}^-$, $\vec{k}_{S_1}^+$ et $\vec{k}_{S_1}^-$, qui entretiennent, dans le milieu de permittivité modulée, les mêmes relations que dans l'H2D passif (Fig. IV.1), et que l'on pourra ressoectivement qualifier d'ondes émise, réfléchi, diffractée et rétrodiffractée, et qui, chacune, donne naissance à un champ émergeant de l'H2D par sa face gauche (en $z = 0$) ou par sa face droite (en $z = L$). La résolution de l'équation de propagation, l'obtention de l'opérateur d'évolution et la détermination de la matrice de transfert de la structure suivent donc le même cheminement que pour l'H2D passif — à ceci près, comme nous le verrons plus loin, que cette matrice de transfert s'obtiendra par produit de trois matrices décrivant successivement l'interaction des champs dans la section de la structure située à gauche ($0 \leq z \leq z_p$) de la source (matrice [L] sur la figure IV.1), la génération par cette source d'un champ d'amplitude a en $z = z_p$, et l'interaction des champs dans la section de l'H2D actif située à droite ($z_p \leq z \leq L$) de la source (matrice [R] sur la figure IV.1).

II.1.1. CONTRIBUTIONS AUX ONDES ÉMERGENTES

Comme le montre la figure IV.2, deux canaux distincts permettent d'alimenter, à partir d'une émission spontanée isotrope, toute onde qui émerge de l'H2D actif dans une direction donnée.

Considérons ainsi par exemple le champ émergent de la structure sous dans la direction du vecteur d'onde $\vec{k}_{R_2}^+$. Ce champ résulte tout d'abord de la réfraction « normale », par l'interface située en $z = L$, de l'onde « R » émise par la source sous l'angle $\theta_{R_1}^+$. Mais il est aussi alimenté par la réfraction « anormale », à cette même interface, de l'onde « S » se propageant dans l'H2D sous l'angle $\theta_{S_1}^+$ et née de la diffraction, dans l'épaisseur de l'H2D, de l'onde « R » émise par la source sous l'angle complémentaire $\theta_{R_1}'^+$.

En effet, si les vecteurs d'onde $\vec{k}_{R_1}^+$ et $\vec{k}_{S_1}^+$ associés à ces deux contributions ne sont pas colinéaires, les vecteurs d'onde $\vec{k}_{R_2}^+$ et $\vec{k}_{S_2}^+$ des ondes émergentes auxquelles ils donnent naissance par réfraction vers le milieu extérieur d'indice n_2 , en revanche, le sont, et ces deux ondes participent donc au signal émergent émis dans leur direction de propagation commune.

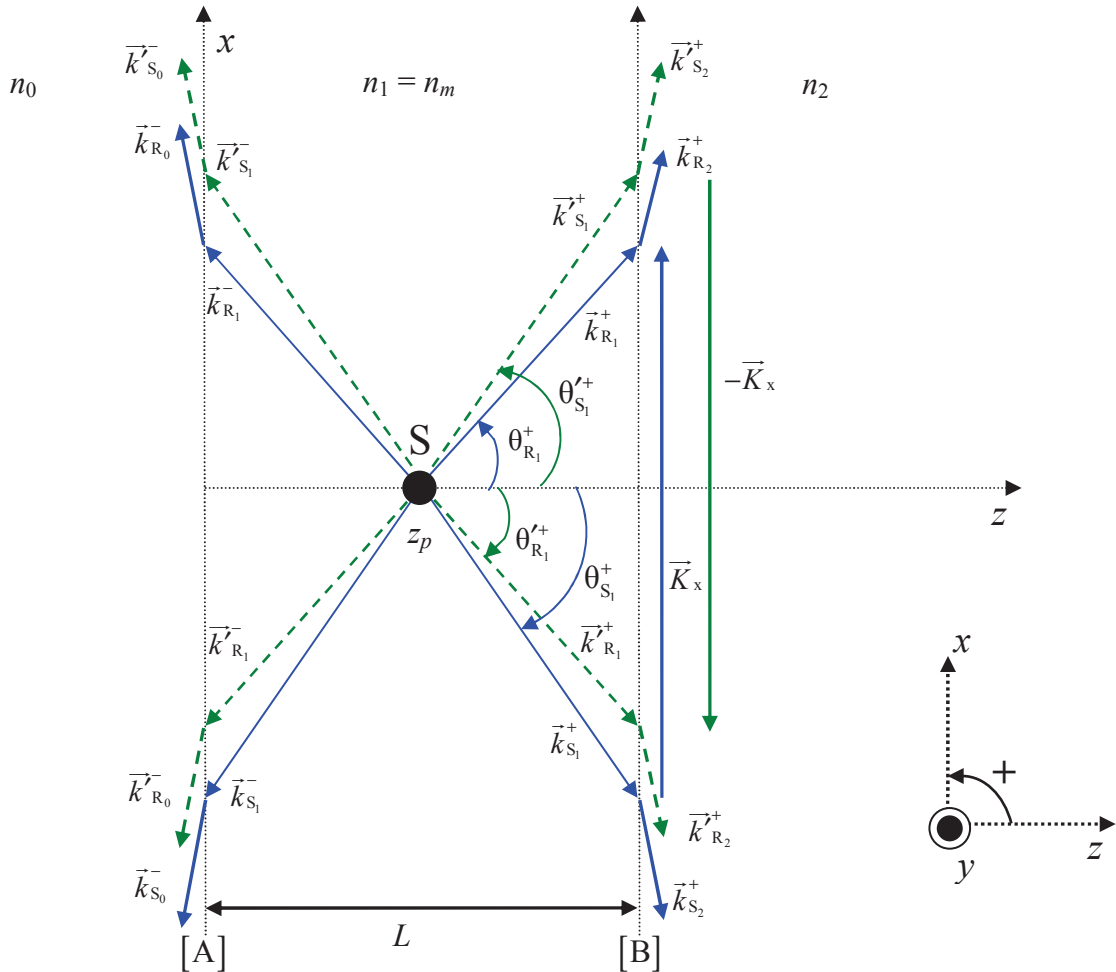


Fig. IV.2 : Canaux d'alimentation des ondes émergeant de l'H2D actif.

C'est bien entendu la nature particulière des ondes « S » — qui obéissent à une relation de dispersion dictée par la périodicité du réseau de diffraction en transmission — qui leur confère ce que nous avons nommé une loi de réfraction « anormale ». Les ondes « R », en revanche, vérifient la loi de réfraction « normale » de Snell-Descartes.

L'existence de deux contributions à l'onde émergeant de la structure parallèlement à $\vec{k}_{R_2}^+$ peut être généralisée aux trois autres ondes associées à l'onde « R » initialement émise, en $z = z_P$, dans la direction de $\vec{k}_{R_1}^+$. C'est ainsi que la réfraction vers le milieu d'indice n_2 de l'onde diffractée « S » de vecteur d'onde $\vec{k}_{S_1}^+$ est colinéaire à celle de l'onde « R » émise par la source dans la direction de $\vec{k}_{R_1}^+$. De même, la réfraction vers le milieu incident d'indice n_0 de l'onde « R » de vecteur d'onde $\vec{k}_{R_1}^-$ (et résultant de la réflexion, par le DBR, de l'onde « R » de vecteur d'onde $\vec{k}_{R_1}^+$) est colinéaire à la réfraction de l'onde « S » de vecteur d'onde $\vec{k}_{S_1}^-$ née de la diffraction dans l'H2D de l'onde « R » de vecteur d'onde $\vec{k}_{R_1}^-$ directement émise par la source. Enfin, la réfraction vers le milieu incident de cette même onde « R » de vecteur d'onde $\vec{k}_{R_1}^-$ se superpose à celle de l'onde « S » de vecteur d'onde $\vec{k}_{S_1}^-$ engendrée au sein de l'H2D par rétrodiffraction de l'émission de la source.

Chacune des quatre ondes émergeant de la structure et représentées sur la figure IV.2 résulte donc de la superposition d'une onde « R » et d'une onde « S » réfractées dans la même direction vers l'un ou l'autre des milieux extérieurs à l'H2D. Toute direction d'émission de la source donnant, on la sait, naissance à 4 canaux (l'onde émise, ainsi que sa réflexion, sa diffraction et sa rétrodiffraction au sein de l'H2D), on en conclut que toute onde émergeant de la structure résulte de la superposition de 8 contributions, issues pour moitié de l'émission sous l'angle $\theta_{R_1}^+$, et pour moitié de celle sous l'angle associé $\theta_{R_1}'^+$.

Ce raisonnement peut évidemment être étendu à toute direction d'émission $\theta_{R_1}^+$ depuis la source, et on obtient ainsi un *continuum* angulaire d'émission spontanée aux interfaces de l'H2D. Ce continuum n'est néanmoins pas isotrope, au contraire de l'émission de la source située en $z = z_P$, car il est filtré par la réponse angulaire très sélective de l'H2D passif — telle qu'elle a été mise en évidence au chapitre précédent. De même, dans le cas d'une extension du modèle à une émission polychromatique d'amplitude $a(\omega)$, l'émission de la source serait-elle filtrée par la réponse spectrale tout aussi sélective de la structure passive.

Notons enfin que pour une émission anisotrope que l'on peut décrire par une onde sphérique, les champs émis dans toutes les directions de l'espace au sein de la cavité sont spatialement cohérents [Kastler 62], et que pour chaque direction d'émergence, les contributions cohérentes superposées interfèrent, comme nous le verrons plus loin lors du calcul de la répartition d'intensité émergeant de l'H2D.

II.1.2. RELATIONS ENTRE LES VECTEURS D'ONDE EN PRÉSENCE

Rappelons tout d'abord les relations qu'entretiennent les vecteurs d'onde des quatre ondes qui forment, au sein de l'H2D, le champ associé à une émission dans la direction $\theta_{R_1}^+$. Ondes émises, diffractées, réfléchies et rétrodiffractées vérifient, pour un angle d'émission appartenant au premier quadrant (Fig. IV.2) :

$$\vec{k}_{R_1}^+ = \vec{k}_{S_1}^+ + \vec{K}_x = \vec{k}_{S_1}^+ + K_x \vec{e}_x, \quad \text{où } K_x > 0, \quad (\text{IV.1a})$$

$$\vec{k}_{R_1}^- = \vec{k}_{S_1}^- + \vec{K}_x = \vec{k}_{S_1}^- + K_x \vec{e}_x, \quad \text{où } K_x > 0, \quad (\text{IV.1b})$$

et les composantes des quatre vecteurs d'onde en présence sont les suivantes :

$$\vec{k}_{R_1}^+ = \begin{pmatrix} \gamma_x = k_{R_1} \sin \theta_{R_1}^+ \\ 0 \\ \beta_1 = k_{R_1} \cos \theta_{R_1}^+ \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_{R_1}^- = \begin{pmatrix} \gamma_x = k_{R_1} \sin \theta_{R_1}^+ \\ 0 \\ -\beta_1 = -k_{R_1} \cos \theta_{R_1}^+ \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.2a})$$

$$\vec{k}_{S_1}^+ = \begin{pmatrix} \gamma_x - K_x = k_{S_1} \sin \theta_{S_1}^+ \\ 0 \\ \beta_1 = k_{S_1} \cos \theta_{S_1}^+ = k_{R_1} \cos \theta_{R_1}^+ \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_{S_1}^- = \begin{pmatrix} \gamma_x - K_x = k_{S_1} \sin \theta_{S_1}^+ \\ 0 \\ -\beta_1 = -k_{S_1} \cos \theta_{S_1}^+ = -k_{R_1} \cos \theta_{R_1}^+ \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.2b})$$

dont les modules s'écrivent respectivement :

$$k_{R_1} = \|\vec{k}_{R_1}^+\| = \|\vec{k}_{R_1}^-\| = \sqrt{\gamma_x^2 + \beta_1^2} = \frac{\omega}{c} n_m = k_0 n_m, \quad (\text{IV.3a})$$

$$k_{S_1} = \|\vec{k}_{S_1}^+\| = \|\vec{k}_{S_1}^-\| = \sqrt{(\gamma_x - K_x)^2 + \beta_1^2}. \quad (\text{IV.3b})$$

Les ondes sortantes correspondantes, en $z=0$ comme en $z=L$, ont pour vecteurs d'onde respectifs :

$$\vec{k}_{R_0}^- = \begin{pmatrix} \gamma_x = k_{R_0} \sin \theta_{R_0}^+ \\ 0 \\ -\beta_{R_0} = -k_{R_0} \cos \theta_{R_0}^+ \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_{R_2}^+ = \begin{pmatrix} \gamma_x = k_{R_2} \sin \theta_{R_2}^+ \\ 0 \\ \beta_{R_2} = k_{R_2} \cos \theta_{R_2}^+ \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.4a})$$

$$\vec{k}_{S_0}^- = \begin{pmatrix} \gamma_x - K_x = k_{S_0} \sin \theta_{S_0}^- \\ 0 \\ -\beta_{S_0} = -k_{S_0} \cos \theta_{S_0}^- \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_{S_2}^+ = \begin{pmatrix} \gamma_x - K_x = k_{S_2} \sin \theta_{S_2}^+ \\ 0 \\ \beta_{S_2} = k_{S_2} \cos \theta_{S_2}^+ \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.4b})$$

dont les modules vérifient :

$$k_{R_0} = \|\vec{k}_{R_0}^-\| = \sqrt{\gamma_x^2 + \beta_{R_0}^2} = \frac{\omega}{c} n_0 = k_0 n_0, \quad (\text{IV.5a})$$

$$k_{R_2} = \|\vec{k}_{R_2}^+\| = \sqrt{\gamma_x^2 + \beta_{R_2}^2} = \frac{\omega}{c} n_2 = k_0 n_2, \quad (\text{IV.5b})$$

$$k_{S_0} = \|\vec{k}_{S_0}^-\| = \sqrt{(\gamma_x - K_x)^2 + \beta_{S_0}^2} = \frac{\omega}{c} n_0 = k_0 n_0, \quad (\text{IV.5c})$$

$$k_{S_2} = \|\vec{k}_{S_2}^+\| = \sqrt{(\gamma_x - K_x)^2 + \beta_{S_2}^2} = \frac{\omega}{c} n_2 = k_0 n_2. \quad (\text{IV.5d})$$

Les ondes « S » dans l'intérieur de l'H2D obéissent à une loi de dispersion « anormale » imposée par la périodicité de l'hologramme en transmission. En revanche, dans les milieux homogènes extérieurs, ces ondes retrouvent une loi de dispersion normale, et on a donc :

$$k_{R_0} = k_{S_0} = n_0 k_0 \text{ et } k_{R_2} = k_{S_2} = n_2 k_0. \quad (\text{IV.6})$$

Des relations similaires aux équations (IV.1)–(IV.6) peuvent évidemment être écrites pour les vecteurs d'onde des quatre ondes associées à une émission dans la direction angulaire $\theta_{R_1}^{'+}$ appartenant au quatrième quadrant (Fig. IV.2), et aux quatre ondes sortantes auxquelles elles donnent naissance — il suffit pour cela d'introduire l'exposant « prime » dans ce jeu d'équations ($\vec{k}_{R_1}^{'+}, \vec{k}_{R_1}^{'-}, \vec{k}_{S_1}^{'+}, \gamma', \beta',$ etc.). Cependant, les relations (IV.1) deviennent ici :

$$\vec{k}_{R_1}^{'+} = \vec{k}_{S_1}^{'+} - \vec{K}_x, \quad (\text{IV.7a})$$

$$\vec{k}_{R_1}^{'-} = \vec{k}_{S_1}^{'-} - \vec{K}_x, \quad (\text{IV.7b})$$

et celles, analogues aux équations (IV.2), définissant les composantes de ces vecteurs d'onde doivent tenir compte de ce changement de signe, avec :

$$\vec{k}_{R_1}^{'+} = \begin{pmatrix} \gamma' = k_{R_1}' \sin \theta_{R_1}^{'+} \\ 0 \\ \beta' = k_{R_1}' \cos \theta_{R_1}^{'+} \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_{R_1}^{'-} = \begin{pmatrix} \gamma' = k_{R_1}' \sin \theta_{R_1}^{'+} \\ 0 \\ -\beta' = -k_{R_1}' \cos \theta_{R_1}^{'+} \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.8a})$$

$$\vec{k}_{S_1}^{'+} = \begin{pmatrix} \gamma' + K_x = k_{S_1}' \sin \theta_{S_1}^{'+} \\ 0 \\ \beta' = k_{S_1}' \cos \theta_{S_1}^{'+} = k_{R_1}' \cos \theta_{R_1}^{'+} \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_{S_1}^{'-} = \begin{pmatrix} \gamma' + K_x = k_{S_1}' \cos \theta_{S_1}^{'+} \\ 0 \\ -\beta' = -k_{S_1}' \cos \theta_{S_1}^{'+} = -k_{R_1}' \cos \theta_{R_1}^{'+} \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.8b})$$

Les modules de ces vecteurs d'onde vérifient alors :

$$k_{R_1}' = \|\vec{k}_{R_1}^{'+}\| = \|\vec{k}_{R_1}^{'-}\| = \sqrt{\gamma'^2 + \beta'^2} = \frac{\omega}{c} n_m = k_0 n_m = k_{R_1}, \quad (\text{IV.9a})$$

$$k_{S_1}' = \|\vec{k}_{S_1}^{'+}\| = \|\vec{k}_{S_1}^{'-}\| = \sqrt{(\gamma' + K_x)^2 + \beta'^2}. \quad (\text{IV.9b})$$

Les ondes sortantes engendrées par le champ émis dans la direction $\theta_{R_1}^{'+}$ ont, quant à elles, des vecteurs d'onde dont les composantes s'écrivent :

$$\vec{k}_{R_0}^- = \begin{pmatrix} \gamma'_x = k'_{R_0} \sin \theta_{R_0}^- \\ 0 \\ -\beta'_{R_0} = -k'_{R_0} \cos \theta_{R_0}^- \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_{R_2}^+ = \begin{pmatrix} \gamma'_x = k'_{R_2} \sin \theta_{R_2}^+ \\ 0 \\ \beta'_{R_2} = k'_{R_2} \cos \theta_{R_2}^+ \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.10a})$$

$$\vec{k}_{S_0}^- = \begin{pmatrix} \gamma'_x + K_x = k'_{S_0} \sin \theta_{S_0}^- \\ 0 \\ -\beta'_{S_0} = -k'_{S_0} \cos \theta_{S_0}^- \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_{S_2}^+ = \begin{pmatrix} \gamma'_x + K_x = k'_{S_2} \sin \theta_{S_2}^+ \\ 0 \\ \beta'_{S_2} = k'_{S_2} \cos \theta_{S_2}^+ \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.10b})$$

et dont les modules vérifient :

$$k'_{R_0} = \|\vec{k}_{R_0}^-\| = \sqrt{\gamma'^2_x + \beta'^2_{R_0}} = \frac{\omega}{c} n_0 = k_0 n_0, \quad (\text{IV.11a})$$

$$k'_{R_2} = \|\vec{k}_{R_2}^+\| = \sqrt{\gamma'^2_x + \beta'^2_{R_2}} = \frac{\omega}{c} n_2 = k_0 n_2, \quad (\text{IV.11b})$$

$$k'_{S_0} = \|\vec{k}_{S_0}^-\| = \sqrt{(\gamma'_x + K_x)^2 + \beta'^2_{S_0}} = \frac{\omega}{c} n_0 = k_0 n_0, \quad (\text{IV.11c})$$

$$k'_{S_2} = \|\vec{k}_{S_2}^+\| = \sqrt{(\gamma'_x + K_x)^2 + \beta'^2_{S_2}} = \frac{\omega}{c} n_2 = k_0 n_2. \quad (\text{IV.11d})$$

À nouveau, on observe que les ondes « S » émergeant dans les milieux homogènes extérieurs vérifient une loi de dispersion normale, et qu'on obtient donc :

$$k'_{R_0} = k'_{S_0} = n_0 k_0 \text{ et } k'_{R_2} = k'_{S_2} = n_2 k_0. \quad (\text{IV.12})$$

Plus généralement, et de manière évidente, les modules des 8 ondes sortantes nées des émissions cohérentes sous les angles $\theta_{R_1}^+$ et $\theta_{R_1}^-$ vérifient :

$$k_{R_0} = k_{S_0} = k'_{R_0} = k'_{S_0} = n_0 k_0 \text{ et } k_{R_2} = k_{S_2} = k'_{R_2} = k'_{S_2} = n_2 k_0. \quad (\text{IV.13})$$

Il convient, toutefois, de rappeler que les angles $\theta_{R_1}^+$ et $\theta_{R_1}^-$ ne sont pas **quelconques** : ils définissent deux directions d'émission spontanée telles qu'une onde « R » émergente engendrée par l'une soit systématiquement colinéaire à une onde « S » émergente générée par l'autre — et *vice versa*. En termes de vecteurs d'onde, cela se traduit par :

$$\vec{k}_{R_2}^+ = \vec{k}_{S_2}^+, \quad \vec{k}_{R_2}^- = \vec{k}_{S_2}^-, \quad \vec{k}_{R_0}^- = \vec{k}_{S_0}^-, \quad \vec{k}_{R_0}^+ = \vec{k}_{S_0}^+, \quad (\text{IV.14})$$

ce qui, en termes angulaires, implique :

$$\theta_{R_2}^+ = \theta_{S_2}^+, \quad \theta_{R_2}^- = \theta_{S_2}^-, \quad \theta_{R_0}^- = \theta_{S_0}^-, \quad \theta_{R_0}^+ = \theta_{S_0}^+. \quad (\text{IV.15})$$

La relation entre les angles $\theta_{R_1}^+$ et $\theta_{R_1}^-$ se déduit, par exemple, de l'égalité des vecteurs $\vec{k}_{R_2}^+$ et $\vec{k}_{S_2}^+$ et de la condition de continuité de la composante tangentielle des vecteurs d'ondes que

ces deux vecteurs doivent vérifier, en $z = L$, avec respectivement $\vec{k}_{R_1}^+$ et $\vec{k}_{S_1}^+$ (Fig. IV.2). D'après ce qui précède, on obtient :

$$\gamma_x = k_{R_1} \sin \theta_{R_1}^+ = \gamma'_x + K_x = k'_{R_1} \sin \theta_{R_1}' + K_x, \quad (\text{IV.16a})$$

soit encore, en notant [Éq. (IV.9a)] que $k_{R_1} = k'_{R_1}$:

$$\sin \theta_{R_1}^+ = \sin \theta_{R_1}' + \frac{K_x}{k_{R_1}}. \quad (\text{IV.16b})$$

Notons cependant que l'ensemble des relations (IV.1)–(IV.16) a été obtenu pour un angle d'émission $\theta_{R_1}^+ \in [0, \pi/2]$ appartenant au premier quadrant du repère cartésien (xOy), et un angle associé $\theta_{R_1}' \in [-\pi/2, 0]$ appartenant au quatrième quadrant de ce même repère. Pour une émission isotrope dans le plan, nous devons généraliser ces expressions à tout angle d'émission $\theta_{R_1}^+$, où $\theta_{R_1}^+ \in [-\pi, \pi]$, les angles étant comptés, selon la convention usuelle, de l'axe (Oz) vers les vecteurs d'onde. On vérifie ainsi aisément que pour un angle d'émission $\theta_{R_1}^+ \in [-\pi/2, 0]$, son homologue doit vérifier $\theta_{R_1}' \in [0, \pi/2]$ et que les rôles des grandeurs associés à ces deux angles sont intervertis, de sorte qu'*in fine*, la relation (IV.16b) devient :

$$\sin \theta_{R_1}^+ = \sin \theta_{R_1}' - \frac{K_x}{k_{R_1}}. \quad (\text{IV.17})$$

Un raisonnement analogue peut être mené pour des angles d'émission $\theta_{R_1}^+ \in [\pi/2, \pi]$ et $\theta_{R_1}' \in [-\pi/2, -\pi]$ appartenant respectivement au deuxième et troisième quadrants du plan, ainsi que pour la situation symétrique où $\theta_{R_1}^+ \in [-\pi/2, -\pi]$ et $\theta_{R_1}' \in [\pi/2, \pi]$. On peut dès lors généraliser la relation existant entre les angles d'émission homologues $\theta_{R_1}^+$ et θ_{R_1}' , avec :

$$\sin \theta_{R_1}^+ = \sin \theta_{R_1}' + \text{sign}(\theta_{R_1}^+) \frac{K_x}{k_{R_1}}, \quad (\text{IV.18})$$

où la fonction « *sign* » est définie par :

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}. \quad (\text{IV.19})$$

De même, on peut généraliser à tout quadrant la relation qu'entretennent l'angle d'émission $\theta_{R_1}^+$ et l'angle de diffraction $\theta_{S_1}^+$ correspondant :

$$\sin \theta_{S_1}^+ = \frac{k_{R_1} \sin \theta_{R_1}^+ - \text{sign}(\theta_{R_1}^+) K_x}{k_{S_1}} \quad (\text{IV.20})$$

Notons pour finir que pour une telle émission interne, dans le cas usuel où l'indice de réfraction moyen n_m du milieu holographique est supérieur aux indices de réfraction n_1 et n_2 des milieux extérieurs, se pose la question de la *réflexion totale interne*. Ainsi, par exemple, l'émission

spontanée de la source sous l'angle $\theta_{R_1}^+ \in [0, \pi/2]$ en direction de l'interface située en $z = L$ ne peut-elle alimenter les quatre ondes sortantes que si les deux conditions angulaires $\theta_{R_1}^+ \leq \arcsin(n_2 / n_m)$ et $|\theta_{S_1}^+| \leq \arcsin(n_2 / n_m)$ sont simultanément vérifiées. Des conditions similaires — aux signes près — sont à vérifier pour l'angle d'émission associé $\theta_{R_1}^+ \in [-\pi/2, 0]$ et l'angle diffracté correspondant $\theta_{S_1}^+$. Un raisonnement identique mène à des restrictions pour l'émergence, vers le milieu extérieur d'indice n_0 , de l'émission de la source en direction de l'interface située en $z = 0$. Dans la situation usuelle où les milieux extérieurs sont identiques, les conditions d'émergence sont identiques, quelle que soit la direction d'émission. Dans tous les cas, on peut définir, sur tout l'intervalle d'émission isotrope $[-\pi, \pi]$, un sous-intervalle d'angles d'émission, formant dans le plan (xOy) un double cône centré sur la source, qui peuvent effectivement donner naissance à des ondes émergeant de l'hologramme actif. Les angles d'émergence hors de l'H2D, eux, couvrent l'intégralité de l'intervalle angulaire $[-\pi, \pi]$.

II.1.3. CALCUL DES COEFFICIENTS DE FRESNEL

Comme nous l'avons vu au chapitre II, les coefficients de Fresnel aux interfaces et les éléments des matrices d'interface [A] et [B] peuvent s'écrire en fonction des paramètres réduits q_s et q_p définis par :

$$q_s = \frac{k_f \cos \theta_f}{k_i \cos \theta_i}, \quad q_p = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_f} \frac{k_f \cos \theta_f}{k_i \cos \theta_i}. \quad (\text{IV.21})$$

Les tableaux ci-dessous précisent les valeurs des modules des vecteurs d'onde et des angles complémentaires $\theta_{R_1}^+$ et $\theta_{R_1}'^+$ servant au calcul de ces coefficients, pour les ondes « R » et « S », à chacune des deux interfaces A (n_0/n_m) et B (n_m/n_2), en tenant compte des deux directions d'émission interne qui donnent naissance à un jeu donné de 4 directions angulaires émergeant de l'H2D par ces interfaces.

Rappelons que les modules des divers vecteurs d'onde d'émission qui entrent en jeu dans l'expression de ces coefficients vérifient les relations suivantes :

$$\|\vec{k}_{R_1}^+\| = \|\vec{k}_{R_1}^-\| = \|\vec{k}_{R_1}'^+\| = \|\vec{k}_{R_1}'^-\| = k_0 n_m = k_{R_1}, \quad (\text{IV.22a})$$

$$\|\vec{k}_{S_1}^+\| = \|\vec{k}_{S_1}^-\| = \sqrt{\beta_1^2 + (\gamma_x - \text{sign}(\theta_{R_1}^+) K_x)^2} = k_{S_1}, \quad (\text{IV.22b})$$

$$\|\vec{k}_{S_1}'^+\| = \|\vec{k}_{S_1}'^-\| = \sqrt{\beta_1'^2 + (\gamma_x' + \text{sign}(\theta_{R_1}^+) K_x)^2} = k_{S_1}'. \quad (\text{IV.22c})$$

	ONDE DE RÉFÉRENCE « R »	ONDE DIFFRACTÉE « S »
INTERFACE A	ANGLE D'EMISSION $\theta_{R_1}^+$ $\theta_i = \theta_{R_1}^+$ $\theta_f = \theta_{R_0}^- = \arcsin \left[k_{R_1} \sin(\theta_{R_1}^+) / k_{R_0} \right]$ $k_i = k_{R_1}$ $k_f = k_{R_0} = \frac{\omega}{c} n_0$	ANGLE D'EMISSION $\theta_{R_1}^+$ $\theta_i = \theta_{S_1}^+ = \arcsin \left[(\gamma_x - \text{sign}(\theta_{R_1}^+) K_x) / k_{S_1} \right]$ $\theta_f = \theta_{S_0}^- = \arcsin \left[(\gamma_x - \text{sign}(\theta_{R_1}^+) K_x) / k_{S_0} \right]$ $k_i = k_{S_1}$ $k_f = k_{S_0} = \frac{\omega}{c} n_0$
	ANGLE COMPLEMENTAIRE $\theta_{R_1}^{'+}$ $\theta_{R_1}^{'+} = \arcsin \left[\sin \theta_{R_1}^+ - \text{sign}(\theta_{R_1}^+) \frac{K_x}{k_{R_1}} \right]$ $\theta_i = \theta_{R_1}^{'+}$ $\theta_f = \theta_{R_0}^{'-} = \arcsin \left[k_{R_1}' \sin(\theta_{R_1}^{'+}) / k_{R_0}' \right]$ $k_i = k_{R_1}'$ $k_f = k_{R_0}' = \frac{\omega}{c} n_0$	ANGLE COMPLEMENTAIRE $\theta_{R_1}^{'+}$ $\theta_i = \theta_{S_1}^{'+} = \arcsin \left[(\gamma_x' + \text{sign}(\theta_{R_1}^+) K_x) / k_{S_1}' \right]$ $\theta_f = \theta_{S_0}^{'-} = \arcsin \left[(\gamma_x' + \text{sign}(\theta_{R_1}^+) K_x) / k_{S_0}' \right]$ $k_i = k_{S_1}'$ $k_f = k_{S_0}' = \frac{\omega}{c} n_0$
INTERFACE B	ANGLE D'EMISSION $\theta_{R_1}^+$ $\theta_i = \theta_{R_1}^+$ $\theta_f = \theta_{R_2}^+ = \arcsin \left[k_{R_1} \sin(\theta_{R_1}^+) / k_{R_2} \right]$ $k_i = k_{R_1}$ $k_f = k_{R_2} = \frac{\omega}{c} n_2$	ANGLE D'EMISSION $\theta_{R_1}^+$ $\theta_i = \theta_{S_1}^+ = \arcsin \left[(\gamma_x - \text{sign}(\theta_{R_1}^+) K_x) / k_{S_1} \right]$ $\theta_f = \theta_{S_2}^+ = \arcsin \left[(\gamma_x - \text{sign}(\theta_{R_1}^+) K_x) / k_{S_2} \right]$ $k_i = k_{S_1}$ $k_f = k_{S_2} = \frac{\omega}{c} n_2$
	ANGLE COMPLEMENTAIRE $\theta_{R_1}^{'+}$ $\theta_{R_1}^{'+} = \arcsin \left[\sin \theta_{R_1}^+ - \text{sign}(\theta_{R_1}^+) \frac{K_x}{k_{R_1}} \right]$ $\theta_i = \theta_{R_1}^{'+}$ $\theta_f = \theta_{R_2}^{'+} = \arcsin \left[k_{R_1}' \sin(\theta_{R_1}^{'+}) / k_{R_2}' \right]$ $k_i = k_{R_1}'$ $k_f = k_{R_2}' = \frac{\omega}{c} n_2$	ANGLE COMPLEMENTAIRE $\theta_{R_1}^{'+}$ $\theta_i = \theta_{S_1}^{'+} = \arcsin \left[(\gamma_x' + \text{sign}(\theta_{R_1}^+) K_x) / k_{S_1}' \right]$ $\theta_f = \theta_{S_2}^{'+} = \arcsin \left[(\gamma_x' + \text{sign}(\theta_{R_1}^+) K_x) / k_{S_2}' \right]$ $k_i = k_{S_1}'$ $k_f = k_{S_2}' = \frac{\omega}{c} n_2$

II.2. MATRICE DE TRANSFERT ETENDUE DE L'H2D ACTIF

La détermination de la réponse de l'hologramme peut passer, comme pour ses homologues passifs 1D et 2D, par l'établissement de sa matrice de transfert. Il s'agit ici d'étendre le formalisme des matrices de transfert au cas de structures actives [Weber 91] [Boucher 06], en introduisant une matrice de transfert (5×5) qui s'appuie sur la matrice (4×4) de l'H2D passif.

Pour commencer, il s'agit de représenter la présence d'une source située en $z = z_p$ dans l'hologramme par une relation matricielle entre les champs estimés immédiatement de part et d'autre de cette abscisse. La figure IV.3 illustre le principe d'une telle description dans le cas simple d'une structure active dans laquelle se superposent deux ondes contra-propagatives colinéaires.

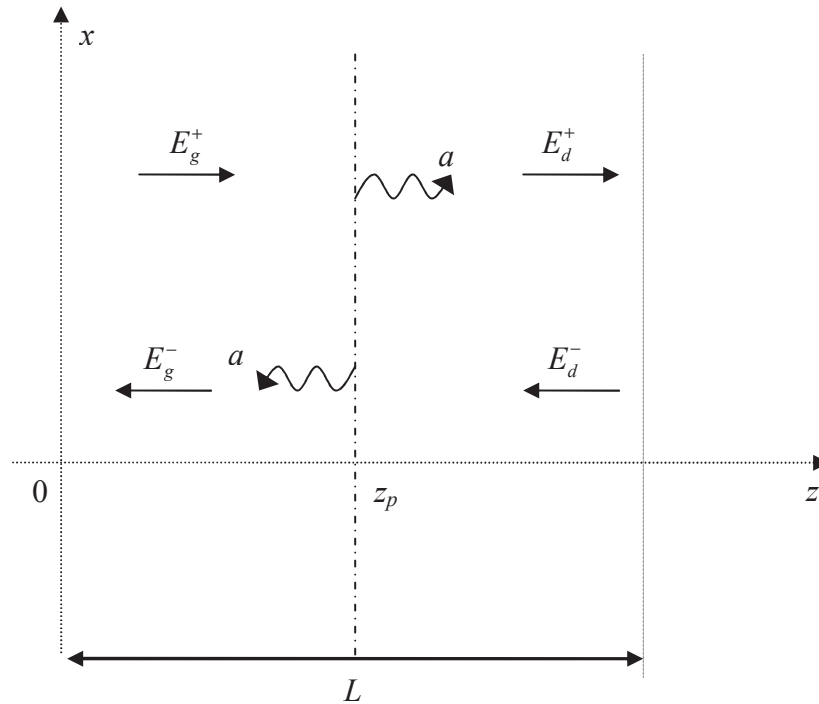


Fig. IV.3 : Représentation schématique d'une structure active dans laquelle deux ondes contra-propagatives se superposent.

De part et d'autre de l'abscisse $z = z_p$, où la source d'une émission spontanée d'amplitude a est placée, on peut écrire les relations suivantes entre champs contra-propagatifs :

$$E_d^+(z = z_p^+) = E_g^+(z = z_p^-) + a, \quad (\text{IV.23.a})$$

$$E_g^-(z = z_p^-) = E_d^-(z = z_p^+) + a. \quad (\text{IV.23.b})$$

L'extension du formalisme des matrices de transfert — ici, des matrices (2×2) — consiste alors à réécrire ces relations selon :

$$\begin{pmatrix} E_g^+ \\ E_g^- \\ 1 \end{pmatrix}_{z=z_p^-} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & +a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_d^+ \\ E_d^- \\ 1 \end{pmatrix}_{z=z_p^+}, \quad (\text{IV.24})$$

où l'on introduit une matrice (3×3) dont la 3^{ème} colonne contient le terme-source a , et la 3^{ème} ligne des vecteurs et de la matrice est construite de manière à préserver le principe de représentation du formalisme. Par cette extension, on est ainsi en mesure de prendre en compte, dans un formalisme éminemment linéaire et développé pour des structures passives, la présence de sources dans une structure active.

La généralisation de cette extension à des structures dans lesquelles les modes de propagation sont plus nombreux est immédiate. Dans l'hologramme 2D passif, quatre champs d'amplitudes respectives $E_{R_1}^+$, $E_{R_1}^-$, $E_{S_1}^+$ et $E_{S_1}^-$ se propagent et les relations que ces amplitudes entretiennent entre deux abscisses quelconques sont représentées, comme nous l'avons vu au chapitre III, par une matrice de transfert (4×4). Dans l'H2D actif, une source d'amplitude a située à l'abscisse $z = z_p$ alimente ces quatre champs, et, *pour une direction angulaire donnée de l'émission de la source*, cet apport peut s'écrire, de part et d'autre de cette abscisse, par une relation matricielle faisant intervenir une matrice de transfert étendue (5×5) telle que :

$$\begin{pmatrix} E_{R_1}^+ \\ E_{R_1}^- \\ E_{S_1}^+ \\ E_{S_1}^- \\ 1 \end{pmatrix}_{z=z_p^-} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & +a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & +a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{R_1}^+ \\ E_{R_1}^- \\ E_{S_1}^+ \\ E_{S_1}^- \\ 1 \end{pmatrix}_{z=z_p^+}. \quad (\text{IV.25})$$

L'établissement de la matrice de transfert d'une section de l'hologramme 2D actif comprenant une source unique située en $z = z_p$ nécessite alors de décrire l'évolution de ces quatre champs dans les régions situées avant (pour $z < z_p$) et après (pour $z > z_p$) cette source. Nous savons, depuis le chapitre III, décrire une telle évolution dans un H2D dépourvu de sources, et chacune de ces deux régions constitue bien un H2D passif, dont nous savons écrire la matrice de transfert (4×4). Rendre cette matrice compatible avec la matrice étendue rendant compte de l'émission spontanée en $z = z_p$ implique une transformation analogue à celle décrite par l'équation (IV.25), selon :

$$\begin{pmatrix} E_{R_1}^+ \\ E_{R_1}^- \\ E_{S_1}^+ \\ E_{S_1}^- \\ 1 \end{pmatrix}_{\substack{z=z_1 \\ z_1 < z_p \\ \text{ou } z_1 > z_p}} = \begin{pmatrix} H_{11}^{z_1, z_2} & H_{12}^{z_1, z_2} & H_{13}^{z_1, z_2} & H_{14}^{z_1, z_2} & 0 \\ H_{21}^{z_1, z_2} & H_{22}^{z_1, z_2} & H_{23}^{z_1, z_2} & H_{24}^{z_1, z_2} & 0 \\ H_{31}^{z_1, z_2} & H_{32}^{z_1, z_2} & H_{33}^{z_1, z_2} & H_{34}^{z_1, z_2} & 0 \\ H_{41}^{z_1, z_2} & H_{42}^{z_1, z_2} & H_{43}^{z_1, z_2} & H_{44}^{z_1, z_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{R_1}^+ \\ E_{R_1}^- \\ E_{S_1}^+ \\ E_{S_1}^- \\ 1 \end{pmatrix}_{\substack{z=z_2 \\ z_1 < z_2 < z_p \\ \text{ou } z_2 > z_1 > z_p}}, \quad (\text{IV.26})$$

où les $H_{ij}^{z_1, z_2}$, $\{i, j\} \in \{1, 2, 3, 4\}^2$ sont les éléments de la matrice de transfert $[H^{z_1, z_2}]$, matrice (4×4) obtenue selon la procédure décrite au chapitre III et décrivant la réponse d'un H2D passif compris entre les abscisses z_1 et z_2 .

La figure IV.4 illustre la façon dont on parvient alors à la matrice de transfert $[H]$ de l'hologramme 2D actif, de longueur totale L et délimité, dans le cas général, par deux miroirs. Comme aux chapitres précédents, nous nous intéresserons au cas simple — mais aisément généralisable — de simples interfaces entre le milieu holographique et deux milieux extérieurs homogènes d'indices de réfraction n_0 et n_2 .

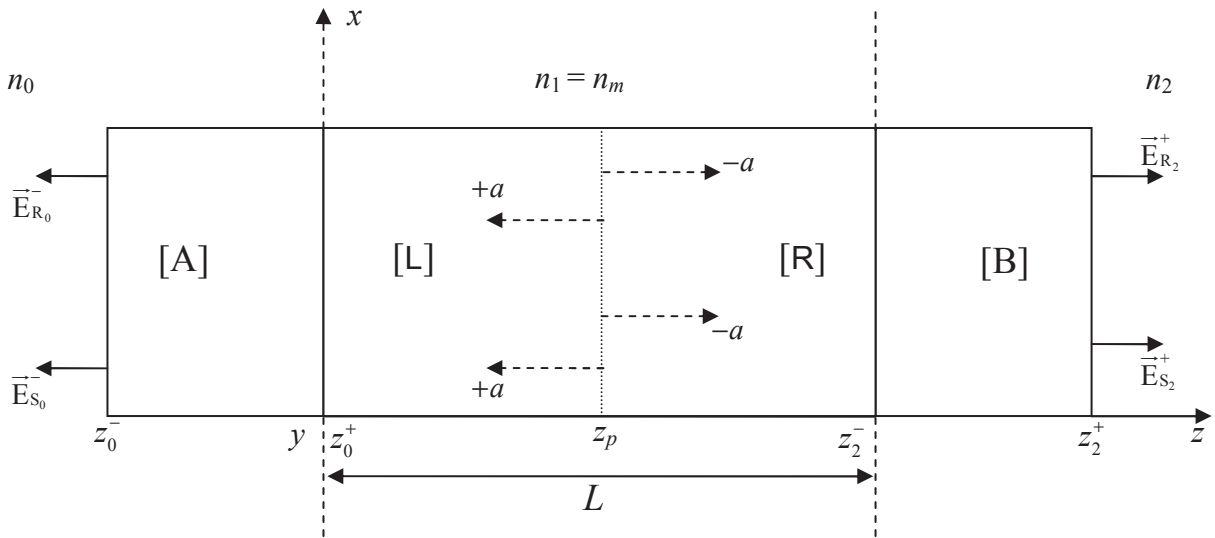


Fig. IV.4 : Décomposition de la matrice de transfert de l'hologramme 2D actif

En accord avec les notations adoptées jusqu'ici, l'hologramme 2D est compris entre les abscisses $z_0 = 0$ et $z_2 = L$, et les deux sections d'hologramme 2D *passif* de part et d'autre de la source isotrope située en $z = z_p$ ont donc pour matrices de transfert respectives $[L] = [H^{0, z_p}]$ et $[R] = [H^{z_p, L}]$ — où $[L]$, pour « *left* », désigne donc la matrice de transfert de la section située à gauche de la source ($0 \leq z < z_p$) et $[R]$, pour « *right* », celle de la section située à sa droite ($z_p < z \leq L$). Le produit de ces deux matrices, $[L][R]$, n'est alors autre que la matrice (4×4) de l'H2D *passif* étudié au chapitre III.

La matrice de transfert étendue (5×5) de l'hologramme 2D *actif*, elle, s'obtient alors simplement, compte-tenu des équations (IV.25) et (IV.26), par la mise en cascade suivante :

$$[H] = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & 0 \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & +a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & +a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & 0 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} & 0 \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (IV.27)$$

Tous calculs faits, il apparaît que le terme-source a , amplitude de l'émission spontanée de la source, apparaît exclusivement dans l'expression des éléments H_{i5} , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ de la cinquième colonne de la matrice de transfert étendue de l'H2D actif, qui lui sont directement proportionnels. On obtient ainsi :

$$H_{15} = a [-L_{11} + L_{12} - L_{13} + L_{14}], \quad (\text{IV.28a})$$

$$H_{25} = a [-L_{21} + L_{22} - L_{23} + L_{24}], \quad (\text{IV.28b})$$

$$H_{35} = a [-L_{31} + L_{32} - L_{33} + L_{34}], \quad (\text{IV.28c})$$

$$H_{45} = a [-L_{41} + L_{42} - L_{43} + L_{44}], \quad (\text{IV.28d})$$

$$H_{55} = 1. \quad (\text{IV.28e})$$

S'il semble, au vu des équations (IV.28a)–(IV.28d), que seule la partie de l'H2D actif située à gauche de la source prend part à la réponse optique de ce dernier, il s'agit d'une apparence trompeuse : les champs sortants en $z = 0$ et en $z = L$ se nourrissent en effet tout à la fois de l'émission spontanée d'amplitude a , de la manière dont elle alimente les quatre ondes en présence dans l'H2D, et de celle dont ces quatre ondes échangent, sur toute la longueur de la structure, de l'énergie.

Si, pour finir, on tient compte des interfaces situées aux abscisses situées en $z = 0$ et en $z = L$ en introduisant les matrices d'interface correspondantes $[A]$ et $[B]$, on obtient enfin la matrice de transfert « globale » de la structure, avec :

$$[M] = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & 0 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} [H] \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} & 0 \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.29})$$

où les matrices $[A]$ et $[B]$ s'obtiennent par une extension à la dimension (5×5) des matrices (4×4) dont nous avons exposé, au chapitre II, le calcul des éléments A_{ij} et B_{ij} , $\{i, j\} \in \{1, 2, 3, 4\}^2$, sur la base de coefficients de Fresnel déduits, suivant l'état de polarisation considéré, des paramètres réduits q_s et q_p dont les expressions ont été détaillées dans la partie II.1.3 du présent chapitre.

En l'absence de champ entrant, puisque seule la source placée en $z = z_p$ donne naissance aux quatre ondes sortantes, les relations entre ces ondes sortantes s'écrivent alors :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ E_{R_0}^- \\ 0 \\ E_{S_0}^- \\ 1 \end{pmatrix}_{z=z_0^- = 0^-} = [M] \begin{pmatrix} E_{R_2}^+ \\ 0 \\ E_{S_2}^+ \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{z=z_2^+ = L^+}. \quad (\text{IV.30})$$

À nouveau, le terme-source a apparaît exclusivement dans l'expression des éléments M_{i5} , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ de la cinquième colonne de la matrice de transfert étendue « globale » de l'H2D actif, dont la forme générique est :

$$[M] = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15}(a) \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25}(a) \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & M_{35}(a) \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & M_{45}(a) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.31})$$

II.3. CALCUL DES INTENSITES SORTANTES DE L'H2D ACTIF

II.3.1. POUR UNE DIRECTION D'ÉMISSION UNIQUE

L'équation (IV.31) mène, pour toute direction angulaire $\theta_{R_1}^+$ de l'émission spontanée d'amplitude a , à un système linéaire de quatre équations indépendantes à quatre inconnues — ces inconnues étant les amplitudes $E_{R_2}^+$, $E_{S_2}^+$, $E_{R_0}^-$ et $E_{S_0}^-$ des champs sortants que l'on peut respectivement qualifier de champ réfracté, diffracté, rétro-réfracté et rétro-diffracté, avec :

$$E_{R_2}^+ = \frac{-M_{15}M_{33} + M_{35}M_{13}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}}, \quad (\text{IV.32a})$$

$$E_{S_2}^+ = \frac{M_{15}M_{31} - M_{35}M_{11}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}}, \quad (\text{IV.32b})$$

$$E_{R_0}^- = M_{15} \left(\frac{-M_{21}M_{33} + M_{23}M_{31}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}} \right) + M_{35} \left(\frac{M_{13}M_{21} - M_{11}M_{23}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}} \right) + M_{25}, \quad (\text{IV.32c})$$

$$E_{S_0}^- = M_{15} \left(\frac{M_{31}M_{43} - M_{33}M_{41}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}} \right) + M_{35} \left(\frac{-M_{11}M_{43} + M_{13}M_{41}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}} \right) + M_{45}. \quad (\text{IV.32d})$$

Les numérateurs de ces champs sont, par le biais des éléments M_{i5} , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ de la cinquième colonne de la matrice de transfert, proportionnels à l'amplitude du champ émis par la source. Ces quatre champs partagent par ailleurs le même dénominateur $D = M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}$, indépendant de l'émission de la source, et qui n'est autre que le dénominateur commun aux coefficients de répartition en intensité de l'hologramme passif, et qui, on le sait, constitue une signature de cette structure vue comme une cavité. Comme pour l'H2D passif, les doublets $(\omega, \theta_{R_1}^+)$ qui annulent D déterminent les modes de résonance de la structure : les champs émis par la source se projettent ainsi sur les modes de résonance de l'hologramme 2D passif.

Les intensités des ondes sortantes réfractée, diffractée, rétro-réfractée et rétro-diffractée se déduisent des expressions précédentes, avec :

$$I_{R_2^+} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 n_2 c |E_{R_2^+}|^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 n_2 c \left| \frac{-M_{15}M_{33} + M_{35}M_{13}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}} \right|^2, \quad (\text{IV.33a})$$

$$I_{S_2^+} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 n_2 c |E_{S_2^+}|^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 n_2 c \left| \frac{M_{15}M_{31} - M_{35}M_{11}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}} \right|^2, \quad (\text{IV.33b})$$

$$I_{R_0^-} = \frac{\varepsilon_0 n_0 c}{2} |E_{R_0^-}|^2 = \frac{\varepsilon_0 n_0 c}{2} \left| M_{15} \left(\frac{-M_{21}M_{33} + M_{23}M_{31}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}} \right) + M_{35} \left(\frac{M_{13}M_{21} - M_{11}M_{23}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}} \right) + M_{25} \right|^2, \quad (\text{IV.33c})$$

$$I_{S_0^-} = \frac{\varepsilon_0 n_0 c}{2} |E_{S_0^-}|^2 = \frac{\varepsilon_0 n_0 c}{2} \left| M_{15} \left(\frac{M_{31}M_{43} - M_{33}M_{41}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}} \right) + M_{35} \left(\frac{-M_{11}M_{43} + M_{13}M_{41}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}} \right) + M_{45} \right|^2. \quad (\text{IV.33d})$$

Toutes ces expressions sont proportionnelles à $|a|^2$, c'est-à-dire à l'intensité de l'émission de la source, et portent, une fois développées, la marque, à travers leur dénominateur commun $|D(\omega, \theta_{R_1}^+)|^2 = |M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}|^2$, d'une cavité résonnante.

II.3.2 POUR DEUX DIRECTIONS D'ÉMISSION COMPLÉMENTAIRES

Nous avons établi précédemment dans ce chapitre qu'il existe deux angles d'émission complémentaires $\theta_{R_1}^+$ et $\theta_{R_1}'^+$ qui alimentent tout ensemble de quatre ondes sortantes repérées, dans les milieux extérieurs à l'hologramme, par les directions angulaires $\theta_{R_2}^+$, $\theta_{S_2}^+$, $\theta_{R_0}^-$ et $\theta_{S_0}^-$. Les calculs développées au §. II.2 s'appliquent naturellement à l'émission d'amplitude a dans la direction $\theta_{R_1}'^+$: cette dernière donne naissance à une réponse de l'H2D actif caractérisée par une matrice de transfert $[M']$ en tout point similaire à la matrice $[M]$ associée à l'émission de même amplitude a dans la direction $\theta_{R_1}^+$ et définie par les équations (IV.27)–(IV.31).

Dès lors, dans chacune des quatre directions d'émergence, le champ total est la superposition colinéaire de champs cohérents issus de l'émission de la source dans les directions complémentaires définies par $\theta_{R_1}^+$ et $\theta_{R_1}'^+$, que l'on peut décrire en introduisant :

$$E_{R_2, S_2}^+ = E_{R_2}^+ + E_{S_2}'^+ = \frac{-M_{15}M_{33} + M_{35}M_{13}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}} + \frac{M_{15}'M_{31}' - M_{35}'M_{11}'}{M_{11}'M_{33}' - M_{13}'M_{31}'}, \quad (\text{IV.34a})$$

$$E_{S_2, R_2}^+ = E_{S_2}^+ + E_{R_2}'^+ = \frac{M_{15}M_{31} - M_{35}M_{11}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}} + \frac{-M_{15}'M_{33}' + M_{35}'M_{13}'}{M_{11}'M_{33}' - M_{13}'M_{31}'}, \quad (\text{IV.34b})$$

$$E_{R_0, S'_0}^- = E_{R_0}^- + E_{S'_0}^- = M_{15} \left(\frac{-M_{21}M_{33} + M_{23}M_{31}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}} \right) + M_{35} \left(\frac{M_{13}M_{21} - M_{11}M_{23}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}} \right) + M_{25} \\ + M'_{15} \left(\frac{M'_{31}M'_{43} - M'_{33}M'_{41}}{M'_{11}M'_{33} - M'_{13}M'_{31}} \right) + M'_{35} \left(\frac{-M'_{11}M'_{43} + M'_{13}M'_{41}}{M'_{11}M'_{33} - M'_{13}M'_{31}} \right) + M'_{45} \quad , \quad (IV.34c)$$

$$E_{S_0, R'_0}^- = E_{S_0}^- + E_{R'_0}^- = M_{15} \left(\frac{M_{31}M_{43} - M_{33}M_{41}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}} \right) + M_{35} \left(\frac{-M_{11}M_{43} + M_{13}M_{41}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}} \right) + M_{45} \\ + M'_{15} \left(\frac{-M'_{21}M'_{33} + M'_{23}M'_{31}}{M'_{11}M'_{33} - M'_{13}M'_{31}} \right) + M'_{35} \left(\frac{M'_{13}M'_{21} - M'_{11}M'_{23}}{M'_{11}M'_{33} - M'_{13}M'_{31}} \right) + M'_{25} \quad . \quad (IV.34d)$$

À nouveau, les intensités sortantes correspondantes se déduisent immédiatement des équations qui précèdent, et s'expriment en fonction des éléments des matrices de transfert $[M]$ et $[M']$ selon :

$$I_{R_2^+, S_2^+} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 n_2 c \left| E_{R_2, S_2}^+ \right|^2, \quad I_{S_2^+, R_2^+} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 n_2 c \left| E_{S_2, R_2}^+ \right|^2, \quad (IV.35ab)$$

$$I_{R_0^-, S_0^-} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 n_0 c \left| E_{R_0, S_0}^- \right|^2, \quad I_{S_0^-, R_0^-} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 n_0 c \left| E_{S_0, R_0}^- \right|^2. \quad (IV.35cd)$$

Comme précédemment, ces expressions sont proportionnelles à $|a|^2$, et donc à l'intensité isotrope émise par la source. Après développement, on constate par ailleurs qu'elles partagent un même dénominateur rendant compte des deux allers-retours suivis par les ondes émises dans les directions complémentaires repérées par $\theta_{R_1}^+$ et $\theta_{R_1}^+$:

$$D_c(\omega, \theta_{R_1}^+, \theta_{R_1}^+) = (M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31})(M'_{11}M'_{33} - M'_{13}M'_{31}), \quad (IV.36)$$

dont l'annulation détermine les modes de résonance de l'H2D actif.

III. PRINCIPES DE GÉNÉRALISATION ET PERSPECTIVES

Les calculs précédents sont applicables à chacun des états fondamentaux, « s » ou « p », de polarisation de l'onde émise en $z = z_p$, et peuvent donc être étendus à tout état de polarisation de l'émission de la source — y compris une émission non-polarisée, considérée comme un mélange statistique de polarisations « s » ou « p ».

De même, pour un spectre d'émission *a priori* large et éminemment polychromatique, l'approche développée demeure valide, pour peu que l'on connaisse la répartition spectrale $a(\omega)$ de la source. Il suffit alors de subdiviser le domaine d'émission en intervalles spectraux suffisamment fins pour déterminer la réponse optique de la structure.

En outre, ce chapitre s'est intéressé à la manière dont l'émission d'une source quasi-ponctuelle localisée en une abscisse unique $z = z_p$ alimente les modes propres de propagation d'un hologramme

bidimensionnel, mais en pratique, une structure active comporte de très nombreuses sources — par exemple, des points quantiques disséminés dans une matrice polymérique dont la permittivité est spatialement modulée.

Si l'on retient que les dopants émetteurs ont tendance, lors de la formation de l'hologramme (étape de polymérisation sous illumination en montage holographique), à venir occuper les zones de faible indice de réfraction, on peut alors proposer de rendre compte de leur émission spatialement périodique en la ramenant à un ensemble discret de N lignes de sources localisées en des abscisses $z = z_{p,i} = z_{p,1} + i\Lambda_z / (N-1)$, $i \in \{0, \dots, N-1\}$ comprises entre $z = 0$ et $z = L$ (où $z_{p,1}$ est l'abscisse de la première ligne de sources) et régulièrement espacées de la distance Λ_z . Dès lors, on peut décomposer l'H2D actif en autant de régions englobant une seule ligne de sources et décrites par une matrice de transfert $[H_i]$ de la forme donnée par l'équation (IV.27). Par produit matriciel en cascade, de gauche à droite, on obtient ainsi la matrice de transfert $[H] = [H_1] [H_2] \dots [H_N]$ globale de l'H2D actif. Notons que dans ce cas, les émissions des différentes sources réparties le long de l'axe de propagation ne sont pas mutuellement cohérentes et que dès lors, les intensités des ondes nées des émissions combinées de ces sources et sortant de la structure dans une direction donnée s'ajoutent simplement.

Si l'on considère en revanche une distribution continue de sources dans la structure, on peut introduire une densité longitudinale d'émission spontanée, en remplaçant l'amplitude a par un terme de la forme $D_{sp}(\omega, z) dz$. Dans ce cas, le calcul cesse d'être entièrement matriciel.

Dans tous les cas, enfin, il apparaît que les champs électriques des ondes émises par la (les) source(s) intracavité se projettent préférentiellement dans les modes de résonances de l'hologramme 2D passif vu comme une cavité, et sont donc spectralement et angulairement filtrés par cette cavité [Kastler 62]. L'efficacité de cette projection dépend également de la position de la (des) source(s), en termes de facteur de recouvrement spatial vis-à-vis des ventres ou des nœuds du champ stationnaire interne. L'annulation d'un dénominateur $D_c(\omega, \theta_{R_1}^+, \theta_{R_1}'^+)$ commun aux intensités sortantes définit les modes d'oscillation de la structure en tant que laser : à angles complémentaires $\theta_{R_1}^+$ et $\theta_{R_1}'^+$ donnés, cette condition définit les fréquences d'émission et le gain au seuil correspondants ; symétriquement, à fréquence d'émission donnée, elle détermine les directions angulaires d'émission et le gain au seuil correspondants. Les résultats présentés dans ce chapitre ouvrent ainsi la voie à la détermination explicite des modes de résonance, ainsi que du seuil d'oscillation laser, de la structure considérée comme un laser DFB.

CONCLUSION

Ce mémoire a été consacré au développement d'un outil de modélisation tout-analytique pour l'étude de réseaux de diffraction épais éventuellement dopés par des sources émettrices. Né d'une rencontre avec l'équipe du Pr. GALSTIAN du COPL de l'université Laval à Québec, ce projet s'inscrit dans le contexte de l'intérêt pour un type de laser à rétroaction distribuée fabriqué à moindre coût, dont le milieu amplificateur est une matrice de polymère dopé par des points quantiques et dans laquelle deux réseaux de diffraction croisés à profils sinusoïdaux sont photo-inscrits.

Nous avons, dans ce cadre, proposé une solution tout-analytique à ce problème en nous appuyant, dans une approche perturbative, sur les formalismes des ondes couplées et des matrices de transfert.

Après une introduction générale aux caractéristiques des réseaux holographiques épais, et une description des techniques expérimentales de photo-inscription et de dopage employées au laboratoire du Pr. GALSTIAN, nous avons développé l'outil de modélisation en procédant par étapes.

Dans un chapitre introductif, nous avons présenté des généralités sur les caractéristiques des réseaux holographiques épais, et rappelé qu'aussi bien les réseaux en transmission que les réseaux en réflexion distribuée (DBR), dans lesquels deux ondes interagissent, peuvent être décrits en termes de paramètres adimensionnels simples qui gouvernent entièrement l'efficacité de diffraction (pour un réseau en transmission) ou la réflectivité (pour un DBR) de ces structures. Ces paramètres normalisés sont interprétés comme des coefficients de couplage entre ondes co- ou contra-directionnelles, suivant le cas, et des coefficients de désaccord vis-à-vis de conditions d'accord de phase (dites conditions de Bragg) entre les ondes et la périodicité du réseau. Classiquement, ces structures sont des empilements multicouches périodiques, ou sont traitées comme tels en première approximation. Nous avons conclu ce chapitre en présetant une technique simple de fabrication de réseaux photo-inscrits dans des matrices de polymères, avec ou sans dopage par des points quantiques, employée au laboratoire du Pr. GALSTIAN.

Notre travail de modélisation à proprement parler s'est ensuite réparti en trois chapitres, au long desquels nous avons progressivement progressé vers une structure diffractive effectivement bidimensionnelle et active. Dans chacun de ces chapitres, et à la différence de l'approche par découpage multicouche, nous avons montré que la structure pouvait être traitée globalement.

Dans un premier temps, après avoir posé les bases du problème et exposé les hypothèses et les formalismes sur lesquels notre travail s'appuie, nous avons entrepris l'étude tout-analytique détaillée d'un réseau holographique épais unidimensionnel (ou hologramme 1D) *passif*, assimilé à un réseau épais de diffraction en transmission (dans le régime de Bragg) placé dans une cavité Fabry-Pérot. Pour chacun des états de polarisation TE et TM d'une onde entrant dans cette structure, nous avons ramené l'équation de propagation à un opérateur d'évolution dont la diagonalisation mène à une matrice de transfert (4×4) qui traduit la propagation conjointe et l'interaction permanente de quatre ondes dans la structure : l'onde incidente réfractée et sa réflexion aux interfaces, mais aussi l'onde diffractée que le réseau en transmission engendre, et sa propre réflexion (ou rétrodiffraction). Nous avons établi que le comportement de ces ondes, et les échanges d'énergie auxquels elles donnent lieu, sont entièrement gouvernés par quelques paramètres adimensionnels, dits paramètres

couploniques, qui peuvent d'interpréter en termes de coefficients de couplage entre ondes co-directionnelles et de coefficient de désaccord vis-à-vis de la condition de Bragg d'accord de phase entre les ondes et la périodicité du réseau. Une étude détaillée des effets interfaciaux a par ailleurs été menée, y compris pour les ondes diffractées dont la relation de dispersion est différente de celle des ondes réfractée et réfléchi. En combinant ces divers résultats, nous avons pu établir l'expression analytique de quatre paramètres de répartition en intensité, coefficients de transmission, de réflexion, de diffraction et de rétrodiffraction. Nous avons pu vérifier que l'expression de ces quatre coefficients faisait apparaître de manière explicite un dénominateur commun dont les conditions d'annulation déterminent les modes d'oscillations de cette structure vue comme une caité résonnante. Nous avons conclu ce chapitre par une visualisation graphique des dépendances spectrale et angulaire de ces coefficients énergétiques vis-à-vis des divers paramètres structuraux de l'hologramme 1D. Nous avons ainsi pu observer qu'une forte efficacité de diffraction était conditionnée à la fois par un bon accord de phase entre les ondes qui se propagent et la périodicité de la structure — donc par la satisfaction de la condition de Bragg — mais aussi par un coefficient de couplage co-directionnel entre l'onde transmise et l'onde diffractée qui assure que l'échange périodique d'énergie entre ces deux ondes soit, en sortie de structure, en faveur de l'onde diffractée, ce qui suppose un compromis idéal entre la force du couplage entre ces ondes (essentiellement conditionnée par l'amplitude de la modulation de permittivité du réseau épais) et la longueur d'interaction sur laquelle ce couplage a lieu (conditionné par leur déphasage mutuel, c'est-à-dire par l'épaisseur du réseau et leurs directions respectives de propagation).

Dans un deuxième temps, nous avons généralisé l'étude précédente, et montré que l'approche tout-analytique mise en œuvre pour l'étude de l'hologramme 1D pouvait être adaptée et appliquée à l'étude de la réponse d'un réseau holographique bidimensionnel (ou hologramme 2D) ou encore H2D), ici encore *passif*, qui n'est autre que la superposition croisée d'un réseau en transmission et d'un réseau en réflexion distribuée (miroir de Bragg, ou DBR). Comme au chapitre précédent, et pour chacun des états de polarisation TE et TM, nous avons mis en évidence les paramètres couploniques caractéristiques qui gouvernent les interactions entre les quatre ondes en présence dans la structure, avec cette fois-ci la présence de paramètres de couplage aussi bien co- que contra-directionnels, et l'existence (et donc la mise en compétition) de deux conditions de Bragg, une pour chaque réseau. Mathématiquement, le cheminement est identique à celui suivi pour l'hologramme 1D, même s'il est plus délicat et nécessite le choix d'une base de décomposition judicieuse des modes de propagation qui se prête à une diagonalisation analytique de l'opérateur d'évolution. La détermination des modes propres de la structure mène à nouveau à sa matrice de transfert (4×4) et aux quatre coefficients de répartition énergétique. Comme pour l'hologramme 1D, nous avons montré que ces quatre coefficients portent, à travers un dénominateur commun explicite, la signature de l'hologramme 2D comme caité résonnante. À nouveau, nous concluons le chapitre par une illustration de nos calculs, en discutant la dépendance spectrale et angulaire de ces coefficients énergétiques vis-à-vis des divers paramètres structuraux de la structure photonique. Ici encore, favoriser l'action de l'un des deux réseaux superposés revient à satisfaire sa condition de Bragg propre : pour le réseau en transmission, la satisfaction de la condition de Bragg permet de privilégier la diffraction au détriment de la réfraction, à condition que le coefficient de couplage co-directionnel soit bien choisi ; pour le réseau en réflexion distribuée (DBR), la satisfaction de la condition de Bragg favorise la réflectivité, sous réserve que le coefficient de couplage contra-directionnel entre

ondes contra-propagatives (réfractée et réfléchie, ou diffractée et rétrodiffractée) soit là encore bien choisi. Il est intéressant de noter qu'en jouant sur les conditions de Bragg respectives de chacun des deux réseaux, on peut faire en sorte que le DBR soit un obstacle à la construction efficace d'une onde diffractée — si le pic spectral ou angulaire de diffraction tombe dans la bande interdite, spectrale ou angulaire, du DBR — ou, au contraire, que le DBR vienne favoriser l'obtention d'une bonne efficacité de diffraction.

Dans un troisième temps, enfin, nous avons posé les bases d'une extension de notre approche au cas d'un hologramme 2D *actif*, dans lequel une source ponctuelle d'émission spontanée, isotrope et monochromatique, est placée. Nous avons établi qu'une description tout-analytique de la structure reste parfaitement possible, *via* l'introduction de matrices de transfert étendues (5×5) incluant la contribution de la source. Nous avons montré comment l'émission isotrope de cette source offre à l'émission de la cavité elle-même plusieurs chemins pour alimenter une direction d'émergence donnée. Plus généralement, il apparaît clairement à travers les calculs que l'émission intracavité se projette dans les modes propres de l'hologramme 2D *passif* étudié au chapitre précédent, qui joue donc le rôle de filtre spectral et angulaire de cette émission. Nous avons enfin établi les expressions analytiques de la dépendance angulaire des intensités des ondes sortant de la structure à travers les facettes qui la délimitent. Ces intensités partagent le dénominateur commun aux coefficients de répartition de l'hologramme 2D passif, caractéristique d'une cavité résonnante qui, en présence de la source, peut devenir cavité laser.

Nous avons conclu ce chapitre, et ce mémoire, en exposant les principes d'une généralisation de cette modélisation à un hologramme 2D actif dans lequel un ensemble de sources, discrètes ou étendues, serait placé, y compris à travers la prise en compte d'un spectre d'émission spontanée non plus monochromatique mais polychromatique à spectre large. Nous avons enfin évoqué les perspectives de ce travail en direction de la détermination des modes d'oscillation de l'hologramme 2D actif en tant que cavité laser DFB, ainsi que des conditions de franchissement du seuil laser d'une telle structure. À terme, ce travail de modélisation, qui peut toujours être ramené à la détermination de paramètres couploniques d'interprétation physique et d'expression analytique simples, a vocation, en collaboration avec nos collègues du COPL de Québec, à servir de guide pour la synthèse de réseaux polymériques dopés en vue d'obtenir des cavités laser optimisées, spectralement ou angulairement.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Barichard 09] A. Barichard, B. Mailhot, A. Rivaton, Y. Israeli, and T. Galstian, «*Direct evidence of photo-induced diffusion of quantum dots in a photopolymerisable matrix*», *Nanotechnology* **20** (25), 255303 (2009)
- [Barichard 10] A. Barichard, T. Galstian, and Y. Israeli, «*Influence of CdSe/ZnS quantum dots in the polymerization process and in the grating recording in acrylate materials*», *J. Phys. Chem. B* **114** (46), 4807, (2010)
- [Barichard 11] A. Barichard, *Enregistrement et analyses physico-chimiques de réseaux dans des matériaux composites polymères-points quantiques*, Thèse de Doctorat, Université Laval (Québec) et Université Blaise Pascal (2011)
- [Bitauld 05] D. Bitauld, *Association d'un réseau de diffraction à un réseau de Bragg intracavité pour le filtrage optique accordable*, Thèse de Doctorat de l'Université de Paris-Sud (2005)
- [Boucher 00] Y. G. Boucher, *Propriétés structurelles des composants optoélectroniques*, Habilitation à diriger des recherches, Université de Bretagne-Occidentale (2000)
- [Boucher 06a] Y. G. Boucher, “*Theoretical investigation of amplified spontaneous emission in an active structure by extended (3×3) transfer matrix formalism: the case of a non uniform longitudinal distribution of emitters*”, *J. Europ. Optics. Soc. Rap. Public.* **1**, 06027 (2006)
- [Boucher 06b] Y. G. Boucher, “*Fundamentals of couplonics*”, *Proc. SPIE* **6182**, Photonic Crystal Materials and Devices III, 61821E (2006)
- [Boucher 07] Y. G. Boucher, A. V. Lavrinenko, and D. N. Chigrin, “*Out of phase coupled periodic waveguides: a couplonic approach*”, *Opt. Quant. Electron.* **39**, 837 (2007)
- [Boudrioua 06] A. Boudrioua, *Optique intégrée, théorie et applications*, Lavoisier (2006)
- [Burckhardt 66] C. B. Burckhardt, “*Diffraction of a plane wave at a sinusoidally stratified dielectric grating*”, *J. Opt. Soc. Am* **56** (11), 1502 (1966)
- [Chapeleau 04] X. Chapeleau, C. Pallavicini, Y. Jaouen, D. Leduc, C. Lupu et C. Boisrobert, “*Caractérisation de composants photoniques innovants par réflectométrie à faible cohérence sensible à la phase*”, *Bulletin du Bureau National de Métrologie (BNM)* (2004)
- [Chateau 93] N. Chateau, *Modélisation et caractérisation de réseaux holographiques : étude de composants optiques holographiques en gélatine bichromatée*, Thèse de Doctorat de l'Université de Paris-Sud (1993)
- [Françon 69] M. Françon, *Holographie*, Masson (1969)

- [Gabor 68] D. Gabor and G. W. Stroke, “*The theory of deep holograms*”, Proceedings of the Royal Society of London **304**, 275 (1968)
- [Gaylord 85] T. K. Gaylord and M. G. Moharam, “*Analysis and applications of optical diffraction by gratings*”, Proceedings of the IEEE **73** (5), 894 (1985)
- [Giles 97] C. R. Giles, “*Lightwave applications of fiber Bragg gratings*”, Journal of Lightwave Technology **15** (8), 1391 (1997)
- [Gourmala 06] O. Gourmala, *Etude et réalisation des réseaux de Bragg pour des applications photoniques*, Thèse de Doctorat de l’Université de Tlemcen (2006)
- [Hariharan 02] P. Hariharan, *Basic of holography*, Cambridge University Press (2002)
- [He 05] Q. He, *Étude théorique et expérimentale de la diffraction de Bragg sur une structure à cristal photonique à deux dimensions*, Technical Report, École Nationale Supérieure de Télécommunications de Paris (2005)
- [He 06] Q. He, I. Zaquine, A. Maruani, S. Massenot, R. Chevallier and R. Frey, “*Band-edge-induced Bragg diffraction in two dimensional photonic crystals*”, Optics Letters **3** (9), 1184 (2006)
- [He 08a] Q. He, I. Zaquine, R. André, G. Roosen and R. Frey, “*Efficient Bragg diffraction in thin semiconductor two-dimensional gratings*”, Optics Letters **33** (23), 2868 (2008)
- [He 08b] Q. He, *Diffraction de Bragg dans des réseaux minces à deux dimensions*, Thèse de Doctorat de l’Université de Paris Sud (2008)
- [He 09] Q. He, I. Zaquine, G. Roosen and R. Frey, “*Bragg diffraction in thin 2D refractive index modulated semiconductor samples*”, J. Opt. Soc. Am. B **26** (3), 390 (2009)
- [Hill 97] K. O. Hill and G. Meltz, “*Fiber Bragg grating technology fundamentals and overview*”, IEEE Journal of Lightwave Technology **15** (8), 1263 (1997)
- [Hsiao 05] V. Hsiao, C. Lu, G. He, M. Pan, A. Cartwright, and P. Prasad, “*High contrast switching of distributed feedback lasing in dye-doped H-PDLC transmission grating structures*”, Optics Express **13** (10), 3787 (2005)
- [Kashyap 99] R. Kashyap, *Fiber Bragg Gratings*, Academic Press (1999)
- [Kastler 62] A. Kastler, *Atome à l’intérieur d’un interféromètre Perot-Fabry*, Applied Optics **1** (1), 17(1962)
- [Kogelnik 69] H. Kogelnik, “*Coupled wave theory for thick hologram gratings*”, The Bell System Technical Journal **48** (9), 2909 (1969)
- [Kogelnik 72] H. Kogelnik and C. V. Shank, “*Coupled wave theory of distributed feedback lasers*”, J. Appl. Phys. **43** (5), 2327 (1972)

- [Lagrost 10] A. Lagrost, *Génération de peignes de longueurs d'ondes à haut débit pour les télécommunications optiques*, Thèse de Doctorat de l'Université de Rennes 1 (2010)
- [Lelong-Ferrand 03] J. Lelong-Ferrand et J.-M. Arnaudière, *Cours de mathématiques*, Dunod (2003)
- [Loukina 03a] T. Loukina, *Étude théorique et expérimentale de réseaux de diffraction pour les télécommunications optiques : Application à la réalisation d'un égaliseur de spectre*, Thèse de Doctorat de l'Ecole Nationale Supérieure de Télécommunications de Bretagne (2003)
- [Loukina 03b] T. Loukina, R. Chevallier, J.-L. De Bougrenet de la Tocnaye, and M. Barge, "Dynamic spectral equalizer using free-space dispersive optics combined with a polymer-dispersed liquid-crystal spatial light attenuator", *Journal of Lightwave Technology* **21** (9), 2067 (2003)
- [Loukina 04] T. Loukina, S. Massenot, R. Chevallier, K. Heggarty, N. M. Shigapova, and A. F. Skochilov, "Volume diffraction gratings for optical telecommunications applications: design study for a spectral equalizer", *Optical Engineering* **43** (11), 2658 (2004)
- [Mallick 90] S. Mallick, *Effets d'épaisseur dans les réseaux*, École d'été d'Optoélectronique, Éditions de Physique (1990)
- [Massenot 04] S. Massenot, J.-L. Kaiser, R. Chevallier, and Y. Renotte, "Study of the dynamic formation of transmission gratings recorded in photopolymers and holographic polymer-dispersed liquid crystals", *Applied Optics* **43** (29), 5489 (2004)
- [Massenot 06] S. Massenot, *Étude, modélisation et réalisation de composants diffractants : contribution à l'étude de matériaux accordables et application à l'enregistrement holographique de filtres résonants*, Thèse de Doctorat de l'École Nationale Supérieure de Télécommunications de Bretagne (2006)
- [Meltz 89] G. Meltz, W. W. Morey, and W. H. Glenn, "Formation of Bragg gratings in optical fibers by a transverse holographic method", *Optics Letters* **14** (15), 823 (1989)
- [Menez 99] L. Menez, I. Zaquine, A. Maruani and R. Frey, "Intracavity Bragg grating", *J. Opt. Soc. Am. B* **16** (11), 1849 (1999)
- [Menez 01] L. Menez, *Étude théorique et expérimentale de l'holographie intracavité*, Thèse de Doctorat de l'École Nationale Supérieure de Télécommunications de Paris (2001)
- [Menez 02a] L. Menez, I. Zaquine, A. Maruani and R. Frey, "Intracavity refractive index Bragg gratings in absorbing and amplifying media", *Optics Communications* **204**, 267 (2002)
- [Menez 02b] L. Menez, I. Zaquine, A. Maruani and R. Frey, "Experimental investigation

- of intracavity Bragg gratings*”, Optics Letters **27** (7), 479 (2002)
- [Menez 02c] L. Menez, I. Zaquine, A. Maruani and R. Frey, “*Bragg thickness criterion for intracavity diffraction gratings*”, J. Opt. Soc. Am. B **19** (5), 965(2002)
- [Moharam 81] M. G. Moharam and T. K. Gaylord, “*Rigorous coupled-wave analysis of planar-grating diffraction*”, J. Opt Soc. Am. **71** (7), 811 (1981)
- [Moreau 05] A. Moreau, I. Zaquine, A. Maruani and R. Frey, “*Efficient Bragg-like operation of intracavity low-efficiency plane gratings*”, J. Opt. Soc. Am. B **22** (11), 2289 (2005)
- [Moreau 06] A. Moreau, *Réseaux de Bragg intracavité en milieu amplificateur*, Thèse de Doctorat de l’École Nationale Supérieure de Télécommunications de Paris (2006)
- [Pérez 96] J.-P. Pérez, *Optique : Fondements et applications*, Masson (1996)
- [Tamir 90] T. Tamir (Ed.), *Guided-wave optoelectronics*, Springer-Verlag (1990)
- [Weber 91] J.-P. Weber and Shyh Wang, *A new method for the calculation of the emission of the emission spectrum of DFB and DBR lasers*, J.Opt. Quant. Electron, **27** (10), 2256 (1991)
- [Yablonovitch 87] E. Yablonovitch, *Inhibited spontaneous emission in solid state physics and electronics*, Phys. Rev. Lett, **58** (20), 2062 (1987)
- [Yariv 84] A. Yariv and P. Yeh, *Optical waves in crystals*, Wiley (1984)

TABLE DES FIGURES

Fig. I.1a :	Schéma de principe de l'enregistrement d'un hologramme	10
Fig. I.1b :	Schéma de principe de la lecture d'un hologramme	10
Fig. I.2 :	Schéma de la diffraction par un réseau épais de diffraction en transmission	12
Fig. I.3 :	Efficacité de diffraction η d'un réseau épais en transmission en fonction des paramètres réduits χL et ΔL	13
Fig. I.4 :	Coupleur directionnel à deux guides. On note L la longueur d'interaction entre les guides (d'après [Boucher 00])	14
Fig. I.5 :	Schéma de la diffraction par un réseau épais de diffraction en réflexion	15
Fig. I.6 :	Réflectivité R d'un réseau épais en réflexion distribuée en fonction des paramètres réduits κL et δL	16
Fig. I.7 :	Structure des points quantiques utilisés comme sources	18
Fig. I.8 :	Spectres d'absorbance (u.a.) et de photoluminescence (u.a.) des points quantiques	18
Fig. I.9 :	Fabrication d'une cellule de monomère photosensible	19
Fig. I.10 :	Image au microscope optique de la couche de monomère pur	19
Fig. I.11 :	Schéma du montage holographique employé	20
Fig. I.12 :	Images en microscopie de fluorescence (à gauche), profils 3D de fluorescence (au milieu), et schémas (à droite) illustrant le processus de diffusion des QDs dans un photopolymère : a) avant irradiation ; b) après 10 minutes et c) après 20 minutes d'irradiation à 30 mW.cm^{-2} (d'après [Barichard 10])	21
Fig. II.1 :	Matrice de transfert (4×4) et les champs qu'elle relie	30
Fig. II.2 :	Représentation schématique des ondes en présence dans l'hologramme 1D d'épaisseur L et de période spatiale Λ_x .	32
Fig. II.3 :	Géométrie des ondes en présence dans l'H1D en polarisation TE	35
Fig. II.4 :	Géométrie des ondes en présence dans l'H1D en polarisation TM	40
Fig. II.5 :	Coefficients de réflexion (r, r') et de transmission (t, t') lors du passage à travers un miroir compris entre les abscisses z_i et z_f	51
Fig. II.6 :	Interface entre un milieu (i) d'indice de réfraction n_i et un milieu (f) d'indice de réfraction n_f . Les directions des vecteurs champs électriques et magnétiques sont représentées ici dans l'état de polarisation TE	54
Fig. II.7 :	Interface entre un milieu (i) d'indice de réfraction n_i et un milieu (f) d'indice de réfraction n_f . Les directions des vecteurs champs électriques et magnétiques sont représentées ici dans l'état de polarisation TM	56
Fig. II.8 :	Vecteurs d'ondes de l'onde de référence interne et de l'onde diffractée lorsque la condition angulaire de Bragg est vérifiée	65
Fig. II.9 :	Coefficient de diffraction en fonction de la longueur d'onde incidente	67
Fig. II.10 :	Coefficient de diffraction en fonction de l'angle d'incidence externe	68
Fig. II.11 :	Coefficient de diffraction en fonction du désaccord de phase co-directionnel normalisé (ΔL)	69
Fig. II.12 :	Coefficients de diffraction T_d et de transmission T en fonction du coefficient	

	de couplage co-directionnel normalisé $\chi_s L$	70
Fig. II.13 :	Coefficient de diffraction en fonction de l'épaisseur L de l'H1D	71
Fig. II.14 :	Coefficient de diffraction en fonction de la période de modulation Λ_x	72
Fig. II.15 :	Coefficient de diffraction en fonction de la partie imaginaire ε_m'' de la permittivité complexe moyenne de l'hologramme 1D	73
Fig. II.16 :	Coefficient de diffraction en fonction de l'amplitude de modulation ε_{1x}' de la partie réelle de la permittivité de l'hologramme 1D	74
Fig. II.17 :	Coefficient de diffraction en fonction de l'amplitude ε_{1x}'' de la modulation de la partie imaginaire de la permittivité de l'hologramme 1D	75
Fig. II.18 :	Coefficient de diffraction en fonction du déphasage ψ_{1x}'' entre les parties réelle et imaginaire de la modulation de permittivité de l'hologramme 1D	76
Fig. III.1 :	Représentation schématique de la structure de symétrie parallélépipède dont les axes sont dirigés dans le plan (Oxyz)	81
Fig. III.2 :	Représentation schématique des ondes en présence dans l'hologramme 2D d'épaisseur L et des périodes spatiales Λ_x selon l'axe (Ox) et Λ_z selon l'axe (Oz)	83
Fig. III.3 :	Géométrie des ondes en présence dans l'hologramme 2D en polarisation TE	84
Fig. III.4 :	Géométrie des ondes en présence dans l'hologramme 2D en polarisation TM	89
Fig. III.5 :	Coefficient de diffraction énergétique en fonction de la longueur d'onde incidente	107
Fig. III.6 :	Coefficient de réflexion énergétique en fonction de la longueur d'onde incidente	108
Fig. III.7 :	Coefficient de diffraction énergétique en fonction de l'angle d'incidence de l'onde de référence incidente sur l'hologramme 2D $\theta_{R_0}^+$	109
Fig. III.8 :	Coefficient de réflexion énergétique en fonction de l'angle d'incidence de l'onde de référence incidente sur l'hologramme 2D $\theta_{R_0}^+$	110
Fig. III.9 :	Coefficient de diffraction énergétique en fonction du désaccord de phase co-directionnel normalisé ΔL	111
Fig. III.10 :	Coefficient de réflexion énergétique en fonction du désaccord de phase co-directionnel normalisé ΔL	112
Fig. III.11 :	Coefficient de diffraction énergétique en fonction du désaccord de phase contra-directionnel normalisé δL	113
Fig. III.12 :	Coefficient de réflexion énergétique en fonction du désaccord de phase contra-directionnel normalisé δL	114
Fig. III.13 :	Coefficients de diffraction énergétique (T_d) et de transmission énergétique (T) en fonction du coefficient de couplage co-directionnel normalisé	115
Fig. III.14 :	Coefficients de réflexion énergétique (R) et de transmission énergétique (T) en fonction du coefficient de couplage contra-directionnel normalisé	116
Fig. III.15 :	Coefficient de diffraction énergétique en fonction de l'épaisseur de l'hologramme	117

Fig. III.16 :	Coefficient de réflexion énergétique en fonction de l'épaisseur de l'hologramme	118
Fig. III.17 :	Coefficient de diffraction énergétique en fonction de la période spatiale du réseau en transmission	119
Fig. III.18 :	Coefficient de réflexion énergétique en fonction de la période spatiale du réseau en réflexion distribuée	120
Fig. III.19 :	Coefficient de diffraction énergétique en fonction de l'angle d'incidence pour différentes valeurs de $\chi_s L$	122
Fig. III.20 :	Coefficient de réflexion énergétique en fonction de l'angle d'incidence pour différentes valeurs de $\chi_s L$	123
Fig. III.21 :	Coefficient de diffraction énergétique en fonction de l'angle d'incidence pour différentes valeurs de $\kappa_s L$	125
Fig. III.22 :	Coefficient de réflexion énergétique en fonction de l'angle d'incidence pour différentes valeurs de $\kappa_s L$	126
Fig. IV.1 :	Source émettrice localisée en z_p émettant de manière isotrope un champ d'amplitude a	132
Fig. IV.2 :	Canaux d'alimentation des ondes émergeant de l'H2D actif	133
Fig. IV.3 :	Représentation schématique d'une structure active dans laquelle deux ondes contra-propagatives se superposent.	141
Fig. IV.4 :	Décomposition de la matrice de transfert de l'hologramme 2D actif	143